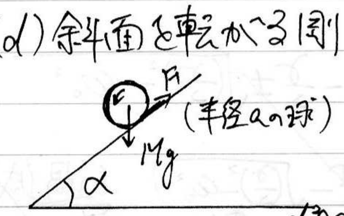
(d) 斜面を転がる剛体



重心の運動方程式 $M\frac{d^2x}{dt^2} = Mg\sin\alpha - F \cdots ①$

重心のまわりの回転の運動方程式 $I\frac{d\omega}{dt} = aF \cdots ②$

$(V_x = a\omega$ より$)$ $\frac{d^2x}{dt^2} = a\frac{d\omega}{dt} \cdots ③$

①〜③より、$M\frac{d^2x}{dt^2} = Mg\sin\alpha - \frac{I}{a^2}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}$

$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{Mg\sin\alpha}{M + \frac{I}{a^2}}$

問題 h だけ垂直方向に落下したとき、重心の運動エネルギーは $xMgh$、回転 〃 $(1-x)Mgh$ とする。

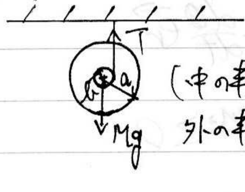
円柱 $(I = \frac{1}{2}Ma^2)$ と球 $(I = \frac{2}{5}Ma^2)$ に対して x を求めよ

〈解答〉 $\underbrace{\frac{1}{2}Mv^2}_{\text{重心の運動エネルギー}} = M\cdot\frac{d^2x}{dt^2}\cdot\frac{h}{\sin\alpha} = \frac{M}{M+\frac{I}{a^2}}Mgh$ ⟶ 円柱の重心の運動エネルギー $\frac{2}{3}Mgh$ ∴ $x=$

球の 〃 〃 $\frac{5}{7}Mgh$ ∴ $x=$

(円柱の回転エネルギー $\frac{1}{3}Mgh$、球の回転エネルギー $\frac{2}{7}Mgh$)

問題 ヨーヨー



(中の半径 b、外の半径 a)

落下の加速度を求めよ また、$I = \frac{1}{2}Ma^2$、$b = \frac{1}{10}a$ のとき加速度は g の何倍

〈解答〉 重心の運動方程式 $M\frac{d^2x}{dt^2} = Mg - T$

回転 〃 $I\frac{d\omega}{dt} = bT$

また、$\frac{d^2x}{dt^2} = b\frac{d\omega}{dt}$

以上より、$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{M}{M+\frac{I}{b^2}}g$ $\quad I = \frac{1}{2}Ma^2$、$b = \frac{1}{10}a$ とすると、$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{51}g$ 〃

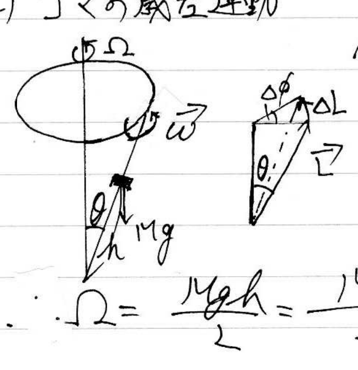
(3) 固定点のまわりの回転運動 $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}^{(e)}$ が回転運動を与える

(回転の自由度3)

(a) 自由回転 $(\vec{N}^{(e)} = 0)$ ⟶ $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$ (角運動量が保存される)

ex. ジャイロコンパス (省く)

(b) コマの歳差運動



$N^{(e)} = Mgh\sin\theta$

$\Delta L = L\sin\theta\Delta\phi$

∴ $\frac{dL}{dt} = L\sin\theta\,\Omega = Mgh\sin\theta$

∴ $\Omega = \frac{Mgh}{L} = \frac{Mgh}{I\omega}$ ⟶ I 大、ω 大、h 小 ⟹ Ω は小さい

慣性モーメント一覧

- 長さ l の棒 $I = \frac{1}{12}Ml^2$
- 半径 a の円筒 $I = Ma^2$
- 半径 a の円柱 $I = \frac{1}{2}Ma^2$
- 薄い板 $I_x = \frac{1}{12}Mb^2$, $I_y = \frac{1}{12}M$
  $I_z = I_x + I_y = \frac{1}{12}M(a^2+b^2)$
- 半径 a の球 $I = \frac{2}{5}Ma^2$

地球回転の歳差運動 (省く)

このあと、オイラー方程式を扱ったが、試験範囲外なので、これも省く