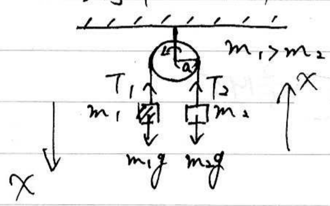
(b) 滑車の運動



$$m_1\frac{d^2x}{dt^2}=m_1g-T_1 \cdots ① \quad m_2\frac{d^2x}{dt^2}=T_2-m_2g \cdots ②$$

$$I\frac{d\omega}{dt}=aT_1-aT_2 \cdots ③$$ （注）$T_1 \neq T_2$（滑車の回転を考えるため）

滑らないで転がる条件 $\Delta x = a\Delta\theta \longrightarrow \frac{d^2x}{dt^2}=a\frac{d\omega}{dt} \cdots ④$

①+②　$(m_1+m_2)\frac{d^2x}{dt^2}=(m_1-m_2)g-(T_1-T_2)$

③より，$T_1-T_2=\frac{I}{a}\cdot\frac{d\omega}{dt}=\frac{I}{a^2}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}$（∵④）なので，

$$(m_1+m_2)\frac{d^2x}{dt^2}=(m_1-m_2)g-\frac{I}{a^2}\cdot\frac{d^2x}{dt^2} \longrightarrow \frac{d^2x}{dt^2}=\frac{(m_1-m_2)g}{m_1+m_2+\frac{I}{a^2}}=A$$（等加速度運動）

問題　(b)でm_1がxだけ落下した，m_1とm_2の運動エネルギーと滑車の回転エネルギーを求め，位置エネルギーの変化率に等しいことを示せ

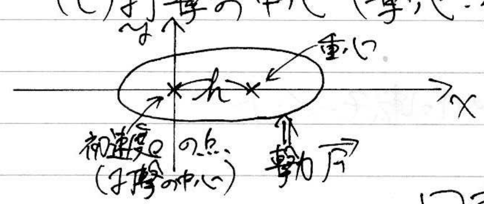
（ヒント）等加速度運動 ⟺ $v^2-0^2=2Ax$

〈解答〉 $v^2=2Ax$　$K_1=\frac{1}{2}m_1v^2=m_1Ax$　$K_2=\frac{1}{2}m_2v^2=m_2Ax$

滑車の回転エネルギー $K_3=\frac{1}{2}I\omega^2=\frac{1}{2}I\frac{v^2}{a^2}=\frac{I}{a^2}Ax$

$K_1+K_2+K_3=(m_1+m_2+\frac{I}{a^2})Ax=(m_1-m_2)gx=$（位置エネルギーの変化率）〃

(c) 打撃の中心（撃心・衝撃の中心）



重心の運動方程式

$M\frac{dV_y}{dt}=F_y \Rightarrow M\Delta V_y=f$（力積 $f=\int F_y dt$）

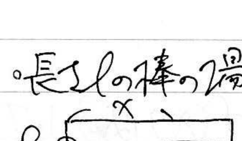
回転の運動方程式（原点のまわり）$I\frac{d\omega}{dt}=xF_y \Rightarrow I\Delta\omega=xf$

O点の初速度0＝剛体がO点を中心に円運動の関係を満たす（瞬間的）

$\Rightarrow \Delta V_y=h\Delta\omega$

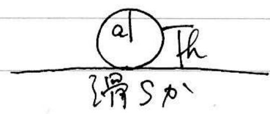
$\therefore \frac{f}{M}=h\frac{x}{I}f \Rightarrow x=\frac{I}{Mh}$

・長さlの棒の場合



$$x=\frac{I}{Mh}=\frac{\overbrace{\frac{1}{12}Ml^2+M\left(\frac{l}{2}\right)^2}^{\text{O点のまわりの慣性モーメント（定理を利用）}}}{M\cdot\frac{l}{2}}=\frac{2}{3}l$$

問題　半径aの球の場合（$I=\frac{2}{5}Ma^2$），hをどう取ると滑らずに転がるか



（ヒント）重心のまわりの回転運動を考える

〈解答〉
$$\begin{cases} MV_x=f \\ I\omega=(h-a)f \text{（少し略した書き方）} \\ V_x=a\omega \end{cases}$$

$\therefore \frac{f}{M}=\frac{a(h-a)}{I}f$

$h-a=\frac{I}{Ma}$

$h=a+\frac{2}{5}a=\frac{7}{5}a$〃