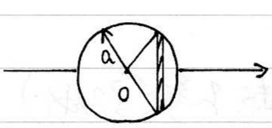
(e) 球　※球を円柱で分解する　質量が詰まっている



$\rho = \dfrac{M}{\frac{4}{3}\pi a^3}$　$I = 2\int_0^a \frac{1}{2}\rho\pi\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)^2 dx \times \left(\sqrt{a^2-x^2}\right)^2 = \cdots = \frac{2}{5}Ma^2$

(2) 回転運動の方程式

$\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}^{(e)} \longrightarrow \dfrac{dL_z}{dt} = N_z^{(e)}$ = 円運動する質点の角運動量の和

$L_z = \sum r_i m_i v_i = \sum m_i r_i^2 \omega = I\omega$　$\therefore I\dfrac{d\omega}{dt} = N_z^{(e)}$

回転運動の例題

(a) 剛体振り子　回転軸

重心

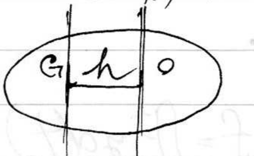
$I\dfrac{d^2\theta}{dt^2} = -Mgh\theta$　単振動の方程式とみて,

$\omega = \sqrt{\dfrac{Mgh}{I}}$, $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{I}{Mgh}}$

$N_z^{(e)} = -Mgh\sin\theta \fallingdotseq -Mgh\theta$　cf. 単振り子 $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$

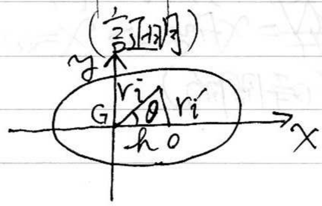
ここで, $l = \dfrac{I}{Mh}$ とすると同じ周期

※(重要) 慣性モーメントに関する定理



$I_O = I_G + Mh^2$　I_G: 重心を通る軸のまわりの回転モーメント

(証明)



$I_O = \sum m_i r_i'^2$
$= \sum m_i(r_i^2 + h^2 - 2hr_i\cos\theta)$
$= I_G + Mh^2 - 2h\underline{\sum m_i x_i}$
　　　　　　　　$\shortparallel$ 0 (∵重心を原点にとっている)

問題

(周期) Tを最小にするxを求めよ

〈解答〉 $I_x = I_G + Mx^2 = \frac{1}{12}Ml^2 + Mx^2$

$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{I}{Mgx}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{\frac{1}{12}l^2 + x^2}{gx}}$ $(x>0)$

$f(x) = \dfrac{\frac{1}{12}l^2 + x^2}{gx}$ とおくと, $f(x)$最小 $\Rightarrow$ Tも最小

$= \dfrac{l^2}{12gx} + \dfrac{x}{g}$　(相加平均$\geqq$相乗平均)より,

$\dfrac{l^2}{12gx} + \dfrac{x}{g} \geqq 2\sqrt{\dfrac{l^2}{12gx}\cdot\dfrac{x}{g}} = \dfrac{l}{\sqrt{3}g}$

等号成立時に$f(x)$は最小で,
それは, $\dfrac{l^2}{12gx} = \dfrac{x}{g}$ をxが満たすときで,

ゆえに, $x = \dfrac{l}{2\sqrt{3}}$ //