(前ページから)

$z' = e^{\alpha t}$ とおいて, α を求める

$(\alpha^2 + 2\omega i\alpha + \omega_0^2)e^{\alpha t} = 0$

$\alpha^2 + 2\omega i \alpha + \omega_0^2 = 0$

$\alpha = -\omega i \pm \sqrt{-\omega^2 - \omega_0^2} = -(\omega \pm \sqrt{\omega^2+\omega_0^2})i$

→ 一般解

$z' = ae^{-(\omega+\sqrt{\omega^2+\omega_0^2})it+c} + be^{-(\omega-\sqrt{\omega^2+\omega_0^2})it+d}$

(a, b, c, d が任意定数)

問題 $\begin{cases} x' = \sin\omega t \cos\omega_0 t \\ y' = \cos\omega t \cos\omega_0 t \end{cases}$ が(*)を満たすことを示せ　ただし, $\omega \ll \omega_0$ なので, ω^2 の項は無視する

〈解答〉 微分計算をするだけなので略。

VI 剛体の運動

変形しない物体 → 質点間の距離が変化しない

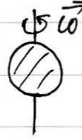
剛体の運動の自由度 = 6　重心: 3個

可能な運動方向の数　回転: 3個

基本になる運動方程式

$M\frac{d^2\vec{r}_G}{dt^2} = \vec{F}^{(e)}$, $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}^{(e)}$

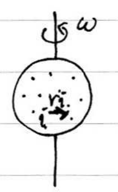
↳ 一般的には難しいので, 固定軸のまわりの回転を考える



回転の自由度 = 1

θ のみでOK

(1) 慣性モーメント



回転エネルギー = 質点の円運動の運動エネルギーの和

$K = \sum \frac{1}{2}m_i v_i^2$ ($\leftarrow v_i = r_i\omega$)

$= \frac{1}{2}I\omega^2$ ($I = \sum m_i r_i^2$

⇕

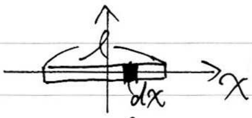
(運動エネルギー $\frac{1}{2}mv^2$)

慣性モーメント = 回転運動の慣性

(回転運動を保とうとする力)

慣性モーメントの計算例

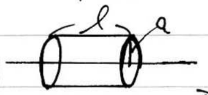
(a) 長さ l の棒



$I = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \lambda dx \times x^2$, ($\lambda = \frac{M}{l}$, λ: 線密度)

$= 2\lambda\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{l}{2}} = \frac{1}{12}Ml^2$

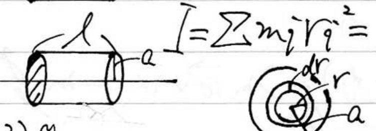
(b) 半径 a の円筒



$I = \sum m_i r_i^2 = Ma^2$

(c) 半径 a の円柱

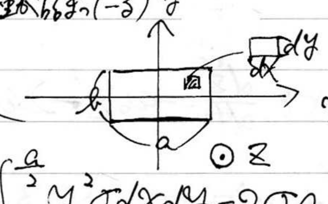
(中まで質量が詰まっている)



$I = \int_0^a \rho 2\pi r dr \times l \times r^2$ ($\rho = \frac{M}{\pi a^2 l}$)

$= 2\pi\rho l\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^a = \frac{1}{2}Ma^2$

(d) 薄い板



面密度

$\sigma = \frac{M}{ab}$ ($\mathrm{kg/m^2}$)

$I_x = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} y^2\sigma dx dy = 2\sigma a\left[\frac{1}{3}y^3\right]_0^{\frac{b}{2}} = \frac{1}{12}Mb^2$

$I_y = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} x^2\sigma dx dy = \frac{1}{12}Ma^2$

$I_z = \sum m_i(x_i^2 + y_i^2) = I_x + I_y$

$= \frac{1}{12}M(a^2+b^2)$