(4) ケプラー問題の解 $\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{l^2}{\mu r^3} - \frac{Gm_1m_2}{\mu r^2}$ ((2)で導いた方程式)

分母に変数があると解きにくいので、$r=\frac{1}{s}$とおいて、sについての方程式を解く

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{1}{s}\right) = \left(\frac{l}{\mu}\right)^2 s^3 - \frac{Gm_1m_2 s^2}{\mu} \quad \cdots ①$$

rはθを通してtに依存するので、$\frac{dr}{dt} = \frac{dr(\theta)}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\cdot\frac{dr}{d\theta} \cdots ②$ *14

角運動量lは保存されるので、$\mu r^2 \frac{d\theta}{dt} = l$ ∴ $\frac{d\theta}{dt} = \frac{l}{\mu}s^2 \cdots ③$

また、$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{s}\right) = -\frac{1}{s^2}\cdot\frac{ds}{dt} = -\frac{1}{s^2}\cdot\frac{l}{\mu}s^2\cdot\frac{ds}{d\theta}$ (∵③)

$= -\frac{l}{\mu}\cdot\frac{ds}{d\theta}$

∴ $\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{1}{s}\right) = -\frac{l}{\mu}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{d\theta}\right) = -\left(\frac{l}{\mu}\right)^2 s^2\cdot\frac{d^2s}{d\theta^2} \cdots ④$ $\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{d\theta}\right) = \frac{d\theta}{dt}\cdot\frac{d}{d\theta}\left(\frac{s}{d\theta}\right)\right)$

①, ④から, $\frac{d^2s}{d\theta^2} = -s + \frac{\mu^2 Gm_1m_2}{l^2} = -s + \frac{1}{a}$

$x = s - \frac{1}{a}$とおくと, $\underbrace{\frac{d^2x}{d\theta^2} = -x}_{単振動方程式の形}$ 一般解 $x = k\cos(\theta+\phi)$ (k, φ: 任意定数とよばれる)

$\rightarrow s = \frac{1}{a} + k\cos(\theta+\phi)$

∴ $\underbrace{r = \frac{a}{1+\varepsilon\cos(\theta+\phi)}}_{円錐曲線の式}$ ($\varepsilon = ak$とおいた)

問題 $r = \frac{a}{1+\varepsilon\cos\theta}$ を $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ として x と y で表せ

〈解答〉

$r + \varepsilon r\cos\theta = a$

$r = a - \varepsilon x$

$x^2 + y^2 = a^2 - 2\varepsilon a x + \varepsilon^2 x^2$

$(1-\varepsilon^2)x^2 + 2\varepsilon a x + y^2 = a^2$

$(1-\varepsilon^2)\left(x + \frac{\varepsilon a}{1-\varepsilon^2}\right)^2 + y^2 = a^2 - \frac{\varepsilon^2 a^2}{1-\varepsilon^2}$ //

※ε: 離心率

$\varepsilon = 0 \rightarrow x^2 + y^2 = a^2$ ⇒ 円を表す

$0 < \varepsilon < 1 \rightarrow 1 - \varepsilon^2 > 0$ ⇒ 楕円を表す

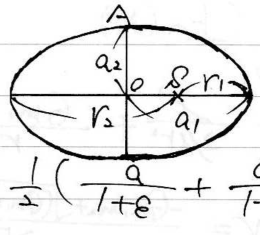
$\varepsilon = 1 \rightarrow 1 - \varepsilon^2 = 0$ ⇒ 放物線を表す

$\varepsilon > 1 \rightarrow 1 - \varepsilon^2 < 0$ ⇒ 双曲線を表す

(5) ケプラーの法則 (第3法則)

$\frac{(周期)^2}{(長半径)^3} = (一定)$ 〈惑星によらない〉

周期 $T = \frac{楕円の面積}{面積速度}$



面積 $\pi a_1 a_2$

$r = \frac{a}{1+\varepsilon\cos\theta}$

$a_1 = \frac{1}{2}(r_1 + r_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{1+\varepsilon} + \frac{a}{1-\varepsilon}\right) = \frac{a}{1-\varepsilon^2}$

$\overline{OS} = a_1 - r_1 = \frac{a}{1-\varepsilon^2} - \frac{a}{1+\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon^2}a = \varepsilon a_1$ $\overline{AS} = a_1$ (2つの焦点からSの長さの和が等しいことを用いる)

ゆえに, $a_2^2 = (\overline{AS})^2 - (\varepsilon a_1)^2 = (1-\varepsilon^2)a_1^2 = \frac{a^2}{1-\varepsilon^2}$ ∴ $a_2 = \frac{a}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} = \sqrt{a}\sqrt{a_1}$

$$T = \frac{\pi a_1 a_2}{\frac{l}{2\mu}} = \frac{2\pi\mu\sqrt{a}}{l}a_1^{\frac{3}{2}}$$

$\left(\frac{dS}{dt} = \frac{l}{2\mu}\right)$ (7ページ) $\frac{T^2}{a_1^3} = \frac{2\pi\mu}{l}\sqrt{\frac{l^2}{\mu G m_1 m_2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{G(m_1 + \underset{太陽}{m_2})}} \approx \frac{2\pi}{\sqrt{Gm_2}}$ (惑星によらない)

---

*14 ②式はどこへ？考えられるのはこの式中のrをsとみて、2行下で用いたということか