極座標系での速度・加速度

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{d(r\vec{e_r})}{dt}=\underbrace{\frac{dr}{dt}}_{v_r}\vec{e_r}+\underbrace{r\frac{d\theta}{dt}}_{v_\theta}\vec{e_\theta}$$ （10ページ下のⒶ,Ⓑ）

$\Rightarrow \mu r^2\frac{d\theta}{dt}=l$（保存量）を証明

$\vec{l}=\mu\vec{r}\times\vec{v}=\mu r\vec{e_r}\times\left(\frac{dr}{dt}\vec{e_r}+r\frac{d\theta}{dt}\vec{e_\theta}\right)$
$=\mu r^2\frac{d\theta}{dt}\vec{e_3}$ //

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d^2r}{dt^2}\vec{e_r}+\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\vec{e_r}}{dt}+\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\theta}{dt}\vec{e_\theta}+r\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{e_\theta}+r\frac{d\theta}{dt}\cdot\frac{d\vec{e_\theta}}{dt}$$ （上の2つの式を用いて）

$$=\underbrace{\left(\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right)}_{a_r}\vec{e_r}+\underbrace{\left(2\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\theta}{dt}+r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)}_{a_\theta}\vec{e_\theta}$$

$$\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)\cdot\vec{e_\theta}\right)$$

運動方程式

$$\mu\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\mu\left(\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right)\vec{e_r}+\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dt}\left(\mu r^2\frac{d\theta}{dt}\right)\vec{e_\theta}$$ （上の$\vec{a}$の式を用いて）

$=f(r)\vec{e_r}$ と表せる（$\because l=\mu r^2\frac{d\theta}{dt}$, lは保存）

$\therefore \mu\left(\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right)=f(r)$ が解くべき方程式

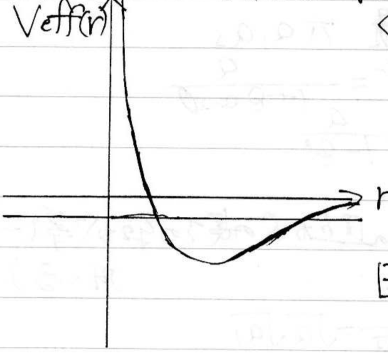
$l=\mu r^2\frac{d\theta}{dt}$ i.e. $\frac{d\theta}{dt}=\frac{l}{\mu r^2}$ を代入して, $\mu\frac{d^2r}{dt^2}=\underbrace{\frac{l^2}{\mu r^3}}_{*11}-\frac{Gm_1m_2}{r^2}$

（3）力学的エネルギーと運動可能領域

$$E=\frac{1}{2}\mu\left(\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\left(r\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right)-\frac{Gm_1m_2}{r}=\frac{1}{2}\mu\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\underbrace{\frac{l^2}{2\mu r^2}-\frac{Gm_1m_2}{r}}_{V_{eff}(r)\ *12}$$

$$\frac{1}{2}\mu\left(\frac{dr}{dt}\right)^2=E-V_{eff}(r)\geq 0$$

問題　運動可能領域を求めよ（上の(3)）



〈解答〉

$$E-\frac{l^2}{2\mu r^2}+\frac{Gm_1m_2}{r}=0\Rightarrow Er^2+Gm_1m_2r-\frac{l^2}{2\mu}=0$$

$$r=\frac{-Gm_1m_2\pm\sqrt{(Gm_1m_2)^2+\frac{2l^2}{\mu}E}}{2E}$$

$E=-\frac{(Gm_1m_2)^2\mu}{2l^2}$ のとき, $r=-\frac{Gm_1m_2}{2E}=\frac{l^2}{\mu Gm_1m_2}$（一定）

→半径一定の運動, 等速円運動

このrをaとおくと, $E=-\frac{Gm_1m_2}{2a}$

って, $E<-\frac{Gm_1m_2}{2a}$ のとき なし, $E=-\frac{Gm_1m_2}{2a}$ のとき, $r=a$

$-\frac{Gm_1m_2}{2a}<E<0$ のとき, 楕円軌道など閉じた軌道^{*13}, $E=0$ のとき, $r\geq\frac{l^2}{2\mu Gm_1m_2}$（ただし $a=\frac{l^2}{\mu Gm_1m_2}$）//

---

*11 円運動のとき, $l=\mu r^2\omega$ より, $\frac{l^2}{\mu r^3}=\mu r\omega^2=\mu\frac{v^2}{r}$　これから, 波線部は遠心力と考えられる

*12 eff : effective（実効的な）　*13 …と答えになっていたがこんなアバウトではいいのであろうか?
何かもっと良い表記があれば教えてください