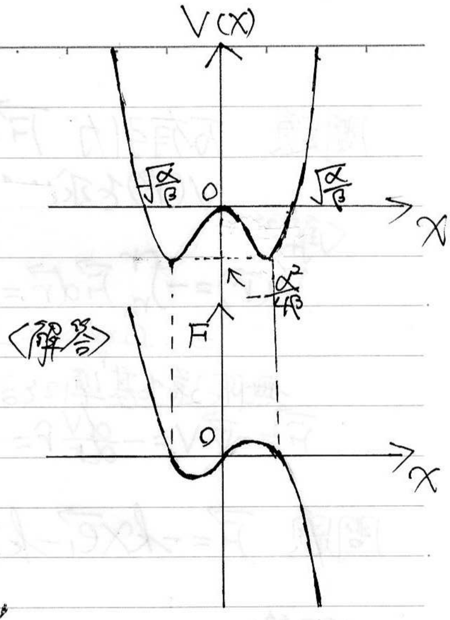
問題　$V(x) = -\alpha x^2 + \beta x^4$　$(\alpha, \beta > 0)$

(a) 力Fを求め，大まかなグラフを書け

$\vec{F} = -\dfrac{dV}{dx} = 2\alpha x - 4\beta x^3$



(b) 運動可能領域を求めよ

〈解答〉グラフより，$E < -\dfrac{\alpha^2}{4\beta}$ のとき，なし

$E = -\dfrac{\alpha^2}{4\beta}$ のとき，$x = \pm\sqrt{\dfrac{\alpha}{2\beta}}$

$\left(V(x) = E \text{ とすると } \beta x^4 - \alpha x^2 - E = 0 \text{ より，} \quad x^2 = \dfrac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4\beta E}}{2\beta} \right)$

$-\dfrac{\alpha^2}{4\beta} < E < 0$ のとき，$-\sqrt{\dfrac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\beta E}}{2\beta}} \leq x \leq -\sqrt{\dfrac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 + 4\beta E}}{2\beta}}$，

$\sqrt{\dfrac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 + 4\beta E}}{2\beta}} \leq x \leq \boxed{\sqrt{\dfrac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\beta E}}{2\beta}}}$

$E \geq 0$ のとき，$-\sqrt{\dfrac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\beta E}}{2\beta}} \leq x \leq \sqrt{\dfrac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\beta E}}{2\beta}}$　//

IV ケプラー問題

$m_1 \dfrac{d^2\vec{r_1}}{dt^2} = \vec{F_{12}}$　（※ $\vec{F_{12}} = -\dfrac{G m_1 m_2}{|\vec{r_1} - \vec{r_2}|^2} \cdot \dfrac{\vec{r_1} - \vec{r_2}}{|\vec{r_1} - \vec{r_2}|}$）

$m_2 \dfrac{d^2\vec{r_2}}{dt^2} = \vec{F_{21}}$　→ $(m_1 + m_2)\dfrac{d^2\vec{r_G}}{dt^2} = \vec{F_{12}} + \vec{F_{21}} = 0$　（重心は等速度運動）

(1) 重心運動の分離

$\vec{r_G} = \dfrac{m_1\vec{r_1} + m_2\vec{r_2}}{m_1 + m_2}$

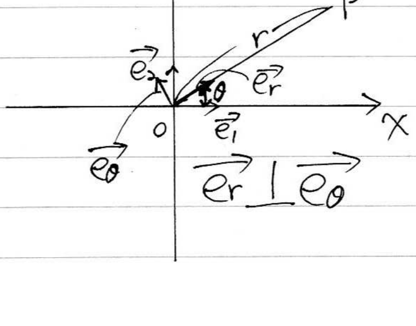
$\vec{r} = \vec{r_1} - \vec{r_2}$ に対する運動方程式

$\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \dfrac{d^2\vec{r_1}}{dt^2} - \dfrac{d^2\vec{r_2}}{dt^2} = \left(\dfrac{1}{m_1} + \dfrac{1}{m_2}\right)\vec{F_{12}}$　$\therefore \mu \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}(\vec{r})$　（$\vec{F} = \vec{F_{12}}$ とおいた）

(2) 2次元極座標　（$\vec{F} = -\dfrac{G m_1 m_2}{r^2}\hat{r} = f(r)\hat{r}$ とおく）

※相対運動の角運動量　$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} = \mu \vec{r} \times \vec{v}$

$\dfrac{d\vec{l}}{dt} = \underbrace{\mu \dfrac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v}}_{0} + \mu \vec{r} \times \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = f(r)\vec{r} \times \hat{r} = 0$　$\vec{l}$ は保存される



$\vec{e_r} \perp \vec{e_\theta}$

$\vec{e_r} = \cos\theta\,\vec{e_1} + \sin\theta\,\vec{e_2}$　　$\vec{e_\theta} = -\sin\theta\,\vec{e_1} + \cos\theta\,\vec{e_2}$

$\dfrac{d\vec{e_r}}{dt} = -\dfrac{d\theta}{dt}\sin\theta\,\vec{e_1} + \dfrac{d\theta}{dt}\cos\theta\,\vec{e_2} = \dfrac{d\theta}{dt}\vec{e_\theta}$　…Ⓐ

$\dfrac{d\vec{e_\theta}}{dt} = -\dfrac{d\theta}{dt}\cos\theta\,\vec{e_1} - \dfrac{d\theta}{dt}\sin\theta\,\vec{e_2} = -\dfrac{d\theta}{dt}\vec{e_r}$　…Ⓑ