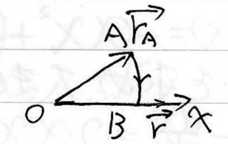
問題　万有引力 $\vec{F}=-\frac{GmM}{r^2}\cdot\hat{r}$　$\left(\hat{r}=\frac{\vec{r}}{r}\right)$ について，
$V(\vec{r})$ を求めよ　また，$\vec{F}=-\vec{\nabla}V$ を計算せよ



〈解答〉

$$V(\vec{r})=-\int_{r_A}^{r}\vec{F}d\vec{r}=-\int_{r_A}^{r}\left(-\frac{GmM}{r^2}\hat{r}\right)\cdot\hat{r}dr$$

$$=-\frac{GmM}{r}+\frac{GmM}{r_A}$$

※等ポテンシャル面＝球面

無限遠を基準にとると，$V(\vec{r})=-\frac{GmM}{r}$　㊂ $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$　$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r}$

$$\vec{F}=-\vec{\nabla}V=-\frac{dV}{dr}\hat{r}=-\frac{GmM}{r^2}\hat{r}$$ //

問題　$\vec{F}=-kx\vec{e_1}-ky\vec{e_2}$ に対して原点を基準とする $V(\vec{r})$ を求めよ　また，$\vec{F}=-\vec{\nabla}V$ を計算

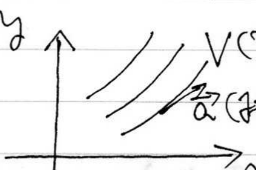
※等ポテンシャル面(線)＝円

〈解答〉

$$V(\vec{r})=\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}ky^2=\frac{1}{2}kr^2$$

$$\vec{F}=-\frac{dV}{dr}\hat{r}=-kr\hat{r}=-kr\left(\frac{x}{r}\vec{e_1}+\frac{y}{r}\vec{e_2}\right)=-kx\vec{e_1}-ky\vec{e_2}$$ //（一部略記して）

※ $\vec{F}$ とポテンシャル面は直交である



〈証明〉
$\vec{a}\propto\vec{e_1}+\frac{dy}{dx}\vec{e_2}$

$V(x,y)=C$ より，$dV(x,y)=\frac{\partial V}{\partial x}dx+\frac{\partial V}{\partial y}dy=0$　$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial V}{\partial x}}{\frac{\partial V}{\partial y}}$

$\therefore\ \vec{a}\propto\frac{\partial V}{\partial y}\vec{e_1}-\frac{\partial V}{\partial x}\vec{e_2}$　また，$\vec{F}=-\vec{\nabla}V=-\left(\frac{\partial V}{\partial x}\vec{e_1}+\frac{\partial V}{\partial y}\vec{e_2}+\frac{\partial V}{\partial z}\vec{e_3}\right)$ なので，

$\vec{a}\cdot\vec{F}=0$　$\therefore\ \vec{a}\perp\vec{F}$

② 質点の力学的エネルギー保存　$E=\frac{1}{2}mv^2+V(\vec{r})$

$$\frac{dE}{dt}=m\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}+\overbrace{\frac{\partial V}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial V}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{\partial V}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}}^{\frac{dV}{dt}}$$

$$=m\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}+\vec{\nabla}V\cdot\vec{v}=\vec{v}\underbrace{\left(m\frac{d\vec{v}}{dt}-\vec{F}\right)}_{\text{運動方程式}}=\underbrace{0}_{\text{保存される}}$$

・運動可能領域　$\frac{1}{2}mv^2=E-V(\vec{r})\geq 0$
E が与えられたとき，運動可能領域を決める

例　重力　$E=\frac{1}{2}mv^2+mgz$　　万有引力　$E=\frac{1}{2}mv^2-\frac{GmM}{r}$