質点系の角運動量 $\vec{L}=\sum\vec{l_i}$ $\frac{d\vec{L}}{dt}=\sum\frac{d\vec{l_i}}{dt}=\sum\vec{r_i}\times\vec{F_i}^{(e)}+\sum\vec{r_i}\times\vec{F_{ij}}$

$$=\vec{N}^{(e)}+\sum_{i<j}\underbrace{(\vec{r_i}\times\vec{F_{ij}}+\vec{r_j}\times\vec{F_{ji}})}_{\vec{r_i}-\vec{r_j}=\vec{F_{ij}}}$$

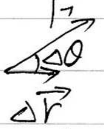
$\vec{F_{ij}}\propto\vec{r_i}-\vec{r_j}$ のとき(中心力), $\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{N}^{(e)}$ (内力は寄与しない)

$\vec{L}$は内力が中心力で, $\vec{N}^{(e)}=0$ (外力0)のとき保存される

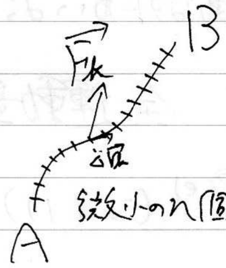
中心力の例 ・万有引力 ・クーロン力

(4) エネルギーの保存

① 力のする仕事, 位置エネルギー



力のした仕事 $\Delta W=F\Delta r\cos\theta$
$=\vec{F}\cdot\Delta\vec{r}$



微小のn個に分割

A→Bへ移動するときの仕事

$W_{AB}=\sum\vec{F_k}\cdot\Delta\vec{r_k}$
$=\int_C\vec{F}\cdot d\vec{r}\ (n\to\infty)$

↖経路Cに沿っての積分

※仕事が経路に依存しないとき(保存力), 保存力に対して位置エネルギーが定義される

$V(\vec{r})=-\int_{r_A}^{\vec{r}}\vec{F}d\vec{r}$ …A点を基準とするポテンシャルエネルギー (位置エネルギー)

$V(\vec{r})$と$\vec{F}$の関係 $V(x+\Delta x,y,z)-V(x,y,z)$

$$=-\int_{(x,y,z)}^{(x+\Delta x,y,z)}\vec{F}\cdot d\vec{r}\doteqdot -F_x\Delta x\quad\therefore F_x=-\frac{V(x+\Delta x,y,z)-V(x,y,z)}{\Delta x}$$

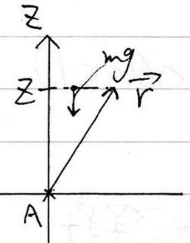
$\Delta x\to 0$のとき, $F_x=-\frac{\partial V}{\partial x}$ y,zについても同様に考えると,

$\vec{F}=-\left(\frac{\partial V}{\partial x}\vec{e_1}+\frac{\partial V}{\partial y}\vec{e_2}+\frac{\partial V}{\partial z}\vec{e_3}\right)=-\mathrm{grad}V=-\vec{\nabla}V$ ※勾配: gradient

(ナブラ) と定義される

位置エネルギーの計算例

重力



$\vec{F}=-mg\vec{e_3}$

$V(\vec{r})=-\int_A^{\vec{r}}\vec{F}d\vec{r}=-\int_0^z(-mg\vec{e_3})\vec{e_3}dz=mgz$

$\vec{F}=-\vec{\nabla}V=-mg\vec{e_3}$

等ポテンシャル面=平面 *1

ばねの力 $\vec{F}=-kx\vec{e_1}$

$V(x)=-\int_0^x(-kx\vec{e_1})\cdot\vec{e_1}dx=\frac{1}{2}kx^2$ $\vec{F}=-\vec{\nabla}V=-kx\vec{e_1}$

---

*1 至極当然であるが, ポテンシャルエネルギーが一定である点を連ねて出来る面を等ポテンシャル面という