

### III 運動の保存量

N個の質点から2粒子系を考へる

$$m \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{F}_i^{(e)} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}^{(i)}$$

(外力)                      (内力)

(1) 重心の運動    全質量  $M = \sum_{i=1}^N m_i$     重心の位置ベクトル  $\vec{r}_G = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{M}$

重心の運動方程式  $M \frac{d\vec{v}_G}{dt} = \vec{F}^{(e)} + \sum_{i \neq j} \vec{F}_{ij}$     ここで,  $\sum_{i \neq j} \vec{F}_{ij} = \sum_{i,j} (\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji})$

↑  
(全外力  $\vec{F}^{(e)} = \sum \vec{F}_i^{(e)}$ )

作用反作用の法則

$\therefore M \frac{d\vec{v}_G}{dt} = \vec{F}^{(e)}$  → 重心の運動は外力のみで決まり、重心の運動方程式の内部力0

(2) 運動量の保存    運動量  $\vec{p} = m\vec{v}$     全運動量  $\vec{P} = \sum \vec{p}_i = \sum m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}$     \*9

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = M \frac{d\vec{v}_G}{dt} = \vec{F}^{(e)} \quad (\because (1)) \quad \therefore \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{(e)}$$

$\vec{F}^{(e)} = 0$  (外力0) の時, 運動量の時間変化  $\frac{d\vec{P}}{dt} = 0$  → 運動量保存

(3) 角運動量の保存    角運動量  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$      $|\vec{L}| = r p \sin\theta$      $\vec{L} \rightarrow \vec{p}$

0点のまわりの回転運動の程度を記す

( $\vec{r} \parallel \vec{p}$  のとき,  $\vec{L} = 0$ ,  $\vec{r} \perp \vec{p}$  のとき,  $L = r p$ )

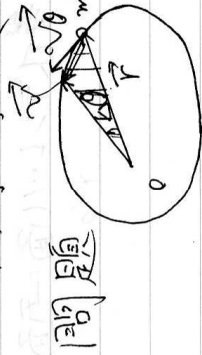
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v} \times \vec{p} + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{N}$$

↓                      ↓                      ↓  
速さ                      向き                      (力のモーメント,  $\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}$  と定義)

0点のまわりの回転の効果を

$\therefore \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}$      $\vec{N} = 0$  のとき, 角運動量の時間変化  $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$  → 角運動量保存

保存例 · 等速度運動    · 等速円運動



↓ 保存のとき

問題    面積速度  $\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2m} |\vec{L}|$  (一定) と示せ ( $\Delta\theta \ll 1$ )

<解答>  $r \Delta\theta = v \Delta t$ ,  $\Delta S = \frac{1}{2} r^2 \Delta\theta = \frac{1}{2} r v \Delta t$     \*8の保存

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r v = \frac{1}{2m} |\vec{r} \times m \vec{v}| = \frac{1}{2m} |\vec{L}| \quad \therefore \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2m} |\vec{L}|$$

⇒ 運動の平面上の運動

\*9  $\sum_{i=1}^N \vec{r}_i$  を省略して  $\sum \vec{r}$  と表す (以下  $\vec{r}$  とはほぼ同様)

128,  $\sum \vec{r} \cdot S$  書かぬ... とは示せる    ex.  $x_i y_i$  ( $= \sum_{i=1}^N x_i y_i$ )