⑤ 強制振動

$m\frac{d^2x}{dt^2}+m\gamma\frac{dx}{dt}+m\omega_0^2x=\underbrace{f(t)}_{\text{時間的に変化する外力}}$ 〔強制振動の方程式〕

以下，$f(t)=F_0\cos\omega t$ の場合を考える

$\begin{cases}\frac{d^2x}{dt^2}+\gamma\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=\frac{F_0}{m}\cos\omega t\\ \frac{d^2y}{dt^2}+\gamma\frac{dy}{dt}+\omega_0^2y=\frac{F_0}{m}\sin\omega t\end{cases}$ とする

$z=x+iy$ とすると，$\frac{d^2z}{dt^2}+\gamma\frac{dz}{dt}+\omega_0^2z=\frac{F_0}{m}e^{i\omega t}$　この z の実数部が x を与える

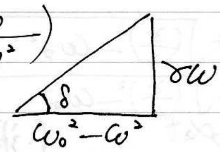
$z=Ae^{i\omega t}$ とおいて，A を求めることにする

$(-\omega^2+i\gamma\omega+\omega_0^2)Ae^{i\omega t}=\frac{F_0}{m}e^{i\omega t}$

$A=\frac{F_0}{m}\cdot\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2+i\gamma\omega}=\frac{F_0}{m}\cdot\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\gamma\omega)^2}}\left(\frac{\omega_0^2-\omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\gamma\omega)^2}}-i\frac{\gamma\omega}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\gamma\omega)^2}}\right)$

$=\frac{F_0}{m}\cdot\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\gamma\omega)^2}}e^{-i\delta}$

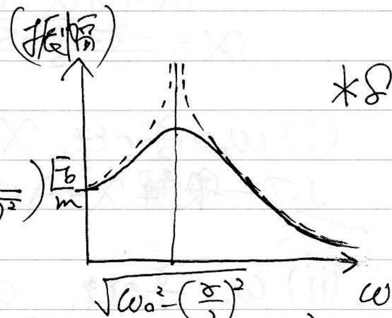
（ただし，$\tan\delta=\frac{\gamma\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$）



$\therefore z=\frac{F_0}{m}\cdot\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\gamma\omega)^2}}e^{i(\omega t-\delta)}$

ゆえに，$x=\frac{F_0}{m}\cdot\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\gamma\omega)^2}}\cos(\omega t-\underbrace{\delta}_{\text{位相の遅れ}})$　（※一般解ではない）

ちなみに，一般解は $x=\frac{F_0}{m}\cdot\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\gamma\omega)^2}}\cos(\omega t-\delta)+\underbrace{ae^{-\frac{\gamma}{2}t}\cos(\omega_1t+\phi)}_{\text{減衰振動の一般解}}$ と表される



＊8

（γ が小さいときは ω_0）

（参）バネ → 点線のグラフ　振幅 $\frac{\omega_0^2A}{|\omega_0^2-\omega^2|}$

問題　$\gamma=0$ のときの一般解 $x=\frac{F_0}{m}\cdot\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2}\cos\omega t+a\cos(\omega_0t+\phi)$ を用いて，
$t=0$ のとき，$x=0$，$\frac{dx}{dt}=0$ を満たす解を求めよ　また，$\omega\to\omega_0$ としたときの解を求めよ

〈解答〉

$\frac{dx}{dt}=-\frac{F_0}{m}\cdot\frac{\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\sin\omega t-a\omega_0\sin(\omega_0t+\phi)$

$t=0$ のとき，$x=\frac{F_0}{m}\cdot\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2}+a\cos\phi=0\cdots①$

$\frac{dx}{dt}=-a\omega_0\sin\phi=0$

$a\sin\phi=0\cdots②$

②で，$a=0$ とすると，①から $F_0=0$（不適）

$\therefore a\neq0$ なので ②から $\phi=0$

このとき，$a=-\frac{F_0}{m}\cdot\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2}$

$x=\frac{F_0}{m}\cdot\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2}(\cos\omega t-\cos\omega_0t)=\frac{F_0}{m}\cdot\frac{2}{\omega_0^2-\omega^2}\sin\frac{\omega_0-\omega}{2}t\sin\frac{\omega_0+\omega}{2}t$ //

$\omega\to\omega_0$ のとき，$x=\frac{F_0}{m}\cdot\frac{1}{\omega_0+\omega}t\cdot\frac{\sin\frac{\omega_0-\omega}{2}t}{\frac{\omega_0-\omega}{2}t}\cdot\sin\frac{\omega_0+\omega}{2}t$

$\to\frac{F_0}{2m\omega_0}t\sin\omega_0t$ //

＊8　強制振動の振幅が $\omega=\omega_0$ の付近で急激に増大する現象を共振という