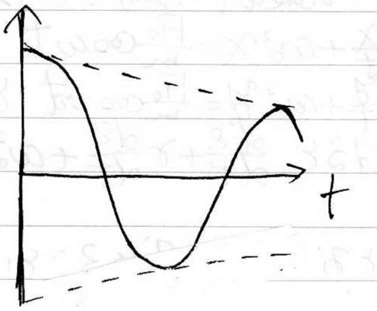
④ 減衰振動

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx-m\gamma\frac{dx}{dt}\cdots Ⓐ$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2}+\gamma\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=0\quad\left(\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}\right)$$



$x=e^{\alpha t}$を代入して αを決める

$$(\alpha^2+\gamma\alpha+\omega_0^2)e^{\alpha t}=0$$

$$\alpha^2+\gamma\alpha+\omega_0^2=0$$

$$\alpha=\frac{-\gamma\pm\sqrt{\gamma^2-4\omega_0^2}}{2}=-\frac{\gamma}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2-\omega_0^2}$$

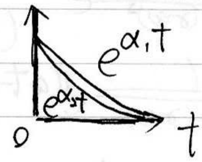
(i) $\omega_0>\frac{\gamma}{2}$のとき, $x=e^{-\frac{\gamma}{2}t+i\omega_1 t},\ e^{-\frac{\gamma}{2}t-i\omega_1 t}$ $\left(\omega_1=\sqrt{\omega_0^2-\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}\right)$

よって, 一般解 $x=Ae^{-\frac{\gamma}{2}t+i\omega_1 t}+A^*e^{-\frac{\gamma}{2}t-i\omega_1 t}=ae^{-\frac{\gamma}{2}t}\cos(\omega_1 t+\phi)$ 〈単振動の項 参照〉

(ii) $\omega_0<\frac{\gamma}{2}$のとき, $\alpha_1=-\frac{\gamma}{2}+\sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2-\omega_0^2}$

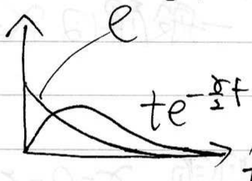
$\alpha_2=-\frac{\gamma}{2}-\sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2-\omega_0^2}$

よって, 一般解 $x=Ce^{\alpha_1 t}+De^{\alpha_2 t}$ (過減衰)



(iii) $\omega_0=\frac{\gamma}{2}$のとき, $x=e^{-\frac{\gamma}{2}t}$とxが一通りしかないので, 一般解が作れない

⟶ $x=f(t)\,e^{-\frac{\gamma}{2}t}$とおいてfを決め, 一般解を作ることにする



$$\frac{d^2x}{dt^2}+\gamma\frac{dx}{dt}+\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2x=0$$

$$\frac{d^2f}{dt^2}e^{-\frac{\gamma}{2}t}-\gamma\frac{df}{dt}e^{-\frac{\gamma}{2}t}+\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2fe^{-\frac{\gamma}{2}t}+\gamma\left(\frac{df}{dt}e^{-\frac{\gamma}{2}t}-\frac{\gamma}{2}fe^{-\frac{\gamma}{2}t}\right)+\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2fe^{-\frac{\gamma}{2}t}=0$$

$\therefore\ \frac{d^2f}{dt^2}=0$ $\quad f=Ct+D$ よって, 一般解 $x=Cte^{-\frac{\gamma}{2}t}+De^{-\frac{\gamma}{2}t}$

(臨界減衰振動)

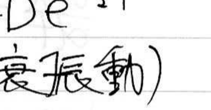
※ 力学的エネルギーは保存されない $\left(\begin{array}{l}E=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2\\ \frac{dE}{dt}=-m\gamma v^2<0\quad(\because Ⓐ)\end{array}\right)$

問題 $\omega_0>\frac{\gamma}{2}$のときの一般解 $x=ae^{-\frac{\gamma}{2}t}\cos(\omega_1 t+\phi)$, $\omega_1=\sqrt{\omega_0^2-\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}$を用いて,

$t=0$のとき, $x=A$, $\frac{dx}{dt}=0$を満たす解を求めよ

また, $\omega_1\to 0$としたとき臨界減衰振動の解になることを示せ

$\left(\tan\phi=-\frac{\gamma}{2\omega_1}\right)$



(ヒント)

$\cos(\omega_1 t+\phi)=C\cos\omega_1 t+D\sin\omega_1 t$と表される

〈解答〉

$$\frac{dx}{dt}=-\frac{\gamma}{2}ae^{-\frac{\gamma}{2}t}\cos(\omega_1 t+\phi)-a\omega_1e^{-\frac{\gamma}{2}t}\sin(\omega_1 t+\phi)$$

$t=0$のとき, $x=a\cos\phi=A$, $\frac{dx}{dt}=-\frac{\gamma}{2}a\cos\phi-a\omega_1\sin\phi=0$

$\therefore\ \tan\phi=-\frac{\gamma}{2\omega_1}$, $a=\frac{A}{\cos\phi}$

$$\cos\phi=\frac{\omega_1}{\sqrt{\omega_1^2+\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}}$$

$$\therefore\ x=\frac{A}{\cos\phi}e^{-\frac{\gamma}{2}t}\cos(\omega_1 t+\phi)$$

$$=\frac{A}{\cos\phi}e^{-\frac{\gamma}{2}t}(\cos\omega_1 t\cos\phi-\sin\omega_1 t\sin\phi)$$

$$=Ae^{-\frac{\gamma}{2}t}\left(\cos\omega_1 t+\frac{\gamma}{2\omega_1}\sin\omega_1 t\right)\text{″}$$

ゆえに, $\omega_1\to 0$のとき, $x=Ae^{-\frac{\gamma}{2}t}\left(1+\frac{\gamma}{2}t\right)$″