③ 単振動　$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx$ 〈ばね, x 方向〉　　$m\frac{d^2s}{dt^2}=-mg\sin\theta$ 〈単振り子, $\theta \ll 1$, 弧を $s=l$

$\underline{\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_0^2x=0}$ $\left(\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}\right)$ …(ア)　　$s=l\theta$, $\sin\theta \fallingdotseq \theta$ より,

単振動の方程式

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}=-\frac{g}{l}\theta \quad \frac{d^2\theta}{dt^2}+\omega_0^2\theta=0 \quad \left(\omega_0=\sqrt{\frac{g}{l}}\right.$$

(ア)から, 複素関数を用いて単振動の一般解を求める

$x=e^{\alpha t}$ とおくと, $(\alpha^2+\omega_0^2)e^{\alpha t}=0$

$\alpha=\pm i\omega_0$

∴ 一般解 $x=Ae^{i\omega_0 t}+Be^{-i\omega_0 t}$ と表せる

x は実数なので, $x=x^*$ (← 複素共役 $\bar{x}$ のこと)

$Ae^{i\omega_0 t}+Be^{-i\omega_0 t}=A^*e^{-i\omega_0 t}+B^*e^{i\omega_0 t}$　∴ $B=A^*$

$\to x=Ae^{i\omega_0 t}+A^*e^{-i\omega_0 t}$

$\left(A=\frac{a}{2}e^{i\phi}\right.$ とおくと,$\left.\right)$

$=\frac{a}{2}e^{i(\omega_0 t+\phi)}+\frac{a}{2}e^{-i(\omega_0 t+\phi)}$

$=a\cos(\omega_0 t+\phi)$ ＊7

問題　$t=0$ のとき, $x=0$, $v=v_0$ を満たす解を求めよ

〈解答〉

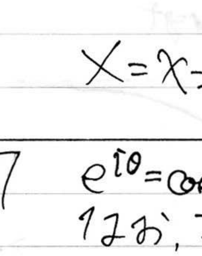
$t=0$, $x=0$ より, $a\cos\phi=0$

$v=\frac{dx}{dt}=-a\omega_0\sin\phi=v_0$

ゆえに, $a\neq 0 \to \phi=\frac{\pi}{2}+m\pi \ (m\in\mathbb{Z})$, $a=-\frac{v_0}{\omega_0}$

(中略) $\to x=\frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t$ //

問題



これが単振動の方程式を満たすことを示せ

〈解答〉

$m\frac{d^2x}{dt^2}=mg-k(x-l)$

$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2}=-\omega_0^2\left(x-l-\frac{g}{\omega_0^2}\right)$

$X=x-l-\frac{g}{\omega_0^2}$ とおくと, $\frac{d^2X}{dt^2}=-\omega_0^2X$　∴ $\frac{d^2X}{dt^2}+\omega_0^2X=0$ //

＊7　$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ を用いた

なお, この式は詳しくは数学で扱うが, 簡単に記すと,

マクローリン展開によって,

$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots$

$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots\cdots$

$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots\cdots$

これから, $\begin{cases} x=i\theta \\ x=\theta \end{cases}$ とすることで, 上記の関係が成り立つ。