NO.

DATE

2.1 1) $u = v - w$ とする $u = f_w(v)$

$Au = A(v-w) = Av - Aw = c - c = 0$

$\therefore\ u \in V_0 \quad \therefore\ f_w : V_c \to V_0$

f_w が単射であることを示す

$v_1, v_2 \in V_c$ とする 但し $v_1 \neq v_2$

$f_w(v_1) - f_w(v_2) = v_1 - v_2 \neq 0$ (仮定より)

$\therefore\ v_1 \neq v_2 \Rightarrow f_w(v_1) \neq f_w(v_2)$ f_w は単射

f_w が全射であることを示す.

即ち $\forall u \in V_0\ \exists v \in V_c$ s.t $u = f_w(v)$

$v = w + u$ ととると

$Av = Aw + Au = c + 0 = c$

$\therefore\ v \in V_c$

$f_w(v) = u + w - w = u$ $\therefore$ f_w は全射

f_w は全単射.

2) $w = w' \Rightarrow f_w = f_{w'}$ を示す.

$v \in V_c$ を任意にとる $u = f_w(v)$ $u' = f_{w'}(v)$ とする

$u - u' = f_w(v) - f_{w'}(v) = -w' + w = 0$ (仮定より)

即ち $u = u'$

$\forall v \in V_c$ について $f_w(v) = f_{w'}(v)$ $\therefore$ $f_w = f_{w'}$

$f_w = f_{w'} \Rightarrow w = w'$ を示す

$\forall v \in V_c$ について

$f_w(v) = f_{w'}(v)$ が成り立つ

即ち $v - w = v - w'$ より $w = w'$ $\therefore\ f_w = f_{w'} \Leftrightarrow w = w'$

3) $u = 0 \in K^m$ とする ~~[illegible]~~ $v = 0$ は V_0 の元 $\therefore\ V_0 \neq \phi$

$\therefore$ $0 \in W$ で $W \neq \phi$

$u, w \in W$ とする $\exists v_1 \in K^m$ $Av_1 = u$

$\exists v_2 \in K^m$ $Av_2 = w$

このとき $A(v_1 + v_2) = u + w$

$v_3 = v_1 + v_2$ とすると $\exists v \in K^m$ s.t $Av = u + w$

$\therefore\ V_{u+w} \neq \phi$ $u + w \in K^m$ より $u + w \in W$

$A(\lambda v_1) = \lambda u$ $\lambda v_1 = v_1'$ とすると $Av_1' = \lambda u$.

$V_{\lambda u} \neq \phi$ $\lambda u \in K^m$ より $\lambda u \in W$

W は K 部分線型空間

2.2

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=c_1 \\ a_{21}x_1+\cdots+a_{2n}x_n=c_2 \\ \quad\vdots \\ a_{n1}x_1+\cdots+a_{nn}x_n=c_n \end{cases}$$ に i の操作をし $$\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=c_1 \\ \quad\vdots \\ \lambda a_{i1}x_1+\cdots+a_{in}\lambda x_n=\lambda c_i \\ \quad\vdots \\ a_{n1}x_1+\cdots+a_{nn}x_n=c_n \end{cases}$$

再び行列を用い $A'v=c'$

但し
$$A'=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{i1} & \cdots & \lambda a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad c'=\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ \lambda c_i \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

(2) (3) (4) 略 だって面倒いんだもん

(5) ~~$Av=c$ の解空間を V とする~~

~~$V=\{v\in K^n \mid Av=c\}$~~

~~i) ii) iii) の操作でえられる方程式はもとの方程式と同値~~

~~$\therefore v\in V \Rightarrow A'v=c'$~~

~~逆に $A'v=c'$ $v\in V$ のとき~~

~~4) でいう逆の操作を行ったときえられる方程式はもとの方程式と同値~~

~~$A'v=c' \Leftrightarrow Av=c$~~

~~$\therefore v\in V$ $A'v=c' \Rightarrow Av=c$ がいえるので~~

$Av=c$ の解空間を V とする

$V=\{v\in K^n \mid Av=c\}$

i) ii) iii) の操作でえられる行列を A' c' とし

$A'v=c'$ の解空間を V' とする

$V'=\{v\in K^n \mid A'v=c'\}$

$v\in V$ ~~の元~~ を1つとる

$Av=c$ これに i) ii) iii) の操作をすると

$A'v=c'$ ができる

$v\in V'$ $\therefore V\subset V'$

$v\in V'$ を1つとる

$A'v=c'$ これに 4) の答え, i) ii) iii) の逆操作をすると

$Av=c$ が得れる

$\therefore v\in V$ $\therefore V\supset V'$

以上より $V=V'$ //

2.3　略　ノートそのまま写そう!

2.4　方程式の定義できる条件　$v \in K^6$　$n=6$

$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_6 \end{pmatrix}$ とする

$v_1 = -3v_5 + v_6$

$v_3 = -2v_5$

$v_4 = -v_5 - v_6$

$v_2 = v_2$

$v_5 = \alpha$

$v_6 = \beta$　$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$として

$v_2 = \gamma$　γ

$\therefore v = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \alpha + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \beta + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \gamma$ //

$r=2$

2)　$n=6$

$r=2$

$v = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \alpha + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \beta + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \gamma$　$r=2$

3)　$n=5$

4)

$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_5 \end{pmatrix}$ とする　$\begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 & & 1 \\ & & & 1 & 1 \\ & & 1 & & 2 \\ & & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$

基本変形をして　$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_4 \\ v_3 \\ v_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

$v_2 = \alpha$

$v_5 = \beta$ とおき　$v = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \alpha + \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \beta$ //

メモ（ただの補足なのでスルーしてもいいよ）

2.1

(1) 単射であることを示すには

$f_u(v_1)=f_u(v_2) \Rightarrow v_1=v_2$ で表してもよい

(2) 同値である…(⇐),(⇒) 両方成立

2.2

(2),(3) 一応 A', c' を示すと、

(2)

$$A'=\begin{array}{c c}\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1}+\mu a_{i1} & \cdots & a_{jn}+\mu a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ (j) \\ \\ \\ \end{matrix}\end{array} \qquad c'=\begin{array}{c c}\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_j+\mu c_i \\ \vdots \\ c_n\end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ (j) \\ \\ \\ \end{matrix}\end{array}$$

(3)

$$A'=\begin{array}{c c}\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ (i) \\ \\ (j) \\ \\ \\ \end{matrix}\end{array} \qquad c'=\begin{array}{c c}\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_j \\ \vdots \\ c_i \\ \vdots \\ c_n\end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ (i) \\ \\ (j) \\ \\ \\ \end{matrix}\end{array}$$

となる。(4)? メンドイ

2.3

ノートの場所は補題 2.3.3

2.4

(1) 任意の値をとりうるv_2に注意！（忘れやすいよ）

(2)

(3) 基本変形すると(3)の式と(4)の式は等しくなる、という話。

(4)

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1行に足す}]{\text{第3行を}} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第4行から第2行、第3行を引く}} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{入れかえ}]{\text{2行と3行}} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$