問題(1.3)の略解.

(1)(イ). まず，仮定 $A \subset B$ より，$L(A)$ と $L(B)$ との関係を求める.

$l \in \mathbb{R}$ に対して次が成り立つ.

$$
\begin{aligned}
l \in L(B) &\iff l \text{ は } B \text{ の下界} \\
&\iff \text{任意の } B \text{ の元 } x \text{ に対して } l \leq x \text{ が成り立つ} \\
&\Rightarrow \text{任意の } A \text{ の元 } x \text{ に対して } l \leq x \text{ が成り立つ} \\
&\iff l \in L(A).
\end{aligned}
$$

$L(A)$, $L(B)$ は $\mathbb{R}$ の部分集合であるから，$L(B) \subset L(A)$ である.

さて，B は下に有界であるとする. $\inf B$ は $L(B)$ の元であるから，$L(B) \subset L(A)$ より，$\inf B$ は $L(A)$ にも属す. 特に，A の下界が存在する. すなわち，A は下に有界. また，$\inf A$ は $L(A)$ の最大元であるから，$\inf B \leq \inf A$ が成り立つ.

(1)(ロ). B は上に有界であるとする. $\sup B$ は B の上界であるから，不等式 $x \leq \sup B$ がすべての $x \in B$ に対して成り立つ. $A \subset B$ であるから，$x \leq \sup B$ はすべての $x \in A$ に対して成り立つ. すなわち，$\sup B$ は，A の上界である. A の上界が存在するから，A は上に有界. また，A の上限 $\sup A$ は $U(A)$ の最小元である. $\sup B \in U(A)$ も示しているから，$\sup A \leq \sup B$ である.

(2) まず，$L(A \cup B)$ と $L(A)$, $L(B)$ との関係を求める. $l \in \mathbb{R}$ とする.

$$
\begin{aligned}
l \in L(A \cup B) &\iff l \text{ は } A \cup B \text{ の下界} \\
&\iff l \text{ は } A \text{ の下界かつ } B \text{ の下界} \\
&\iff l \in L(A) \text{ かつ } l \in L(B) \\
&\iff l \in L(A) \cap L(B).
\end{aligned}
$$

この同値が，すべての実数 l に対して成り立ち，$L(A \cup B)$, $L(A)$, $L(B)$ は $\mathbb{R}$ の部分集合であるから，$L(A \cup B) = L(A) \cap L(B)$ である.

さて，A, B は下に有界であるとする. A, B の下限を，それぞれ α_A, α_B とあらわす. $L(A) = (-\infty, \alpha_A]$, $L(B) = (-\infty, \alpha_B]$ である

から,

$$L(A\cup B)=L(A)\cap L(B)=(-\infty,\alpha_A]\cap(-\infty,\beta_A]$$
$$=(-\infty,\min\{\alpha_A,\alpha_B\}].$$

よって, $\min\{\alpha_A,\alpha_B\}=\min\{\inf A,\inf B\}$ は $A\cup B$ の下限である.

下限が存在するから, $A\cup B$ は下に有界である.

(3) A, B は上に有界であるとする. A, B の上限を, それぞれ β_A, β_B とあらわす. このとき, 上界の性質より, $U(A)=[\beta_A,+\infty)$, $U(B)=[\beta_B,+\infty)$. $u\in\mathbb{R}$ のとき, 次の同値が成り立つ.

$u\in U(A\cup B)$ $\Longleftrightarrow$ u は $A\cup B$ の上界

$\Longleftrightarrow$ u は A の上界 かつ B の上界

$\Longleftrightarrow$ $\beta_A\leq u$ かつ $\beta_B\leq u$

$\Longleftrightarrow$ $\max\{\beta_A,\beta_B\}\leq u$.

よって, $U(A\cup B)=[\max\{\beta_A,\beta_B\},+\infty)$. したがって, $A\cup B$ は, 上に有界であって, $A\cup B$ の上限 $\sup(A\cup B)$ は, $\max\{\beta_A,\beta_B\}=\max\{\sup A,\sup B\}$ と一致する.

問題 (1.5) の略解.

(1) ($\Rightarrow$) は (2) で示す. 以下は, ($\Leftarrow$) の部分の証明.

C は有界であるとする. A の元 a をひとつ取る. $x\in A$ のとき, $x-a\in C$ であるから, $\inf C\leq x-a\leq\sup C$. すなわち,

$$a+\inf C\leq x\leq a+\sup C$$

が, すべての A の元 x に対して成り立つ. よって, $a+\inf C$ は A の下界, $a+\sup C$ は A の上界. それゆえ, A は有界.

(2) A は有界であるとする. $C=-C$ であるから, C が上に有界であるとき, C も下に有界であって, $\inf C=\inf(-C)=-\sup C$ が成り立つ. (p 10 (1.8) を用いた.) よって, C の上限が $\sup A-\inf A$ である

ことを示せば充分である. これを, p9 (1.7.1)の方針で示す.
すなわち, 次の①, ②が成り立つことを示す.

① $\sup A - \inf A$ は C の上界である.

② 任意の $v \in \mathbb{R}$ に対して, "$v < \sup A - \inf A \Rightarrow v$ は C の上界ではない" が成り立つ.

①について. $z \in C$ とする. $z = x - y$ となる $x, y \in A$ が取れる. $\inf A \leq x, y \leq \sup A$ であるから, $z = x - y \leq \sup A - \inf A$. 不等式 $z \leq \sup A - \inf A$ がすべての $z \in C$ に対して成り立つから, $\sup A - \inf A$ は C の上界である.

②について. 実数 v について, $v < \sup A - \inf A$ が成り立つとする. $\varepsilon = \sup A - \inf B - v$ とおく. $0 < \varepsilon$ である.

$\inf A + \frac{1}{2}\varepsilon$ は $\inf A$ より大きいから, A の下界ではない. よって, $y < \inf A + \frac{1}{2}\varepsilon$ をみたす A の元 y が取れる. 同様の理由で, $\sup A - \frac{1}{2}\varepsilon < x$ をみたす A の元 x も取れる. これらの x, y について

$$x - y > (\sup A - \tfrac{1}{2}\varepsilon) - (\inf A + \tfrac{1}{2}\varepsilon) = \sup A - \inf A - \varepsilon = v$$

が成り立つ. $x - y \in C$ であるから, この不等式より, v は C の上界でないことが分かる.

以上より, $\sup A - \inf A$ は C の上限である. (1)の($\Rightarrow$)も示された.
最後の部分を示す. $x, y \in A$ とすると, $|x - y| = x - y$ あるいは $|x - y| = y - x$ であるから, $|x - y| \in C$. よって, $\{|x - y| ; x, y \in A\}$ は C の部分集合. 特に, この集合は有界. この集合の上限を β とあらわす. $z \in C$ とすると, $z = x - y$ となる $x, y \in A$ が取れて $z = x - y \leq |x - y| \leq \beta$ が成り立つ. すなわち, β は C の上界. また, $\{|x - y| ; x, y \in A\}$ が C の部分集合であることから, $\beta \leq \sup C$. 合わせて, $\beta = \sup C$ であることが分かる.

問題(2.8)(1)の略解

(⇒)について．$a_n \to +\infty$ $(n \to \infty)$ が成り立つと仮定する．仮定より，

$$0 < a_n \qquad (n \in \mathbb{N} \text{ かつ } n \geq n_0 \text{ のとき})$$

が成り立つ自然数 n_0 が取れる．$n \geq n_0$ のとき，$a_n > 0$ であるから，有限個の n を除いて $a_n > 0$ が成り立つ．もう一つの条件もみたされることを示す．正数 ε が任意に与えられたとする．このとき，仮定より，

$$\frac{1}{\varepsilon} < a_n \qquad (n \in \mathbb{N} \text{ かつ } n \geq N \text{ のとき})$$

が成り立つ自然数 N が取れる．$n \geq N$ である $n \in \mathbb{N}$ に対して $0 < \frac{1}{a_n} < \varepsilon$ が成り立つ．以上より，$\varepsilon > 0$ である実数 ε に対して

$$\left|\frac{1}{a_n} - 0\right| < \varepsilon \qquad (n \in \mathbb{N} \text{ かつ } n \geq N \text{ のとき})$$

が成り立つような自然数 N が取れることが分かった．すなわち，$\frac{1}{a_n} \to 0$ $(n \to \infty)$．

(⇐)について．右側の条件がみたされると仮定する．この仮定より，

$$a_n > 0 \qquad (n \in \mathbb{N} \text{ かつ } n \geq n_0 \text{ のとき})$$

が成り立つような自然数 n_0 が取れる．$a_n \to +\infty$ $(n \to \infty)$ の証明に入る．実数 M が任意に与えられたとする．$\frac{1}{1+|M|}$ は正の実数であるから，$\frac{1}{a_n} \to 0$ $(n \to \infty)$ という仮定より，

$$\left|\frac{1}{a_n} - 0\right| < \frac{1}{1+|M|} \qquad (n \in \mathbb{N} \text{ かつ } n \geq n_1 \text{ のとき})$$

が成り立つ自然数 n_1 が取れる．$N = \max\{n_0, n_1\}$ と定める．自然数 n が $n \geq N$ をみたすとすると，$n \geq N \geq n_0$ より，$a_n > 0$ が成り立つ．それゆえ，このとき，同値

$$\left|\frac{1}{a_n}\right| < \frac{1}{1+|M|} \iff 1+|M| < a_n$$

が成り立つ．また，$M < 1 + |M|$ も成り立つから，

(*) $$M < a_n \qquad (n \in \mathbb{N} \text{ かつ } n \geq N \text{ のとき})$$

が成り立つ．以上より，実数 M に対して，(*) が成り立つ自然数 N が存在することが分かった．すなわち，$a_n \to +\infty$ $(n \to \infty)$ である．

問題(2.8)(1)の略解.

$0 \leq r < 1$ であるとする. $r < r' < 1$ である $r' \in \mathbb{R}$ を取る. $\varepsilon = r' - r$ と定める. $0 < \varepsilon$ であるから, $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to r \ (n \to \infty)$ という仮定より,

$$\left|\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| - r\right| < \varepsilon \qquad (n \in \mathbb{N} \text{ かつ } n \geq N \text{ のとき})$$

が成り立つ自然数 N が取れる. 同値

$$\left|\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| - r\right| < \varepsilon \iff r - \varepsilon < \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < r + \varepsilon = r'$$

より, $n \geq N$ であるすべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < r'$ が成り立つ. よって, $n > N$ のとき,

$$|a_n| < r'|a_{n-1}| < \cdots < (r')^{n-N}|a_N| = \frac{|a_N|}{(r')^N}(r')^n$$

が成り立つ. $0 < r' < 1$ であるから, $(r')^{n-N}|a_N| \to 0 \ (n \to \infty)$. (問題(2.7)の結果を用いた.) はさみうちの原理より, $|a_n| \to 0 \ (n \to \infty)$.

レポート課題

次の§1〜§3の問題の中から, §1, §3の問題を各1題, §2の問題を2題, 合計4題の問題を選択し, その解答を所定のA3サイズの用紙に書いて提出せよ.

§1 : (1.2), (1.4), (1.7)(2), (1.8), (1.9), (1.10)

§2 : (2.1), (2.5), (2.6), (2.9) − (2.16)

§3 : (3.1) − (3.9)

また, 解答は, A3サイズの用紙の表裏の左半分・右半分の各部分に一つの問題の解答を書け.

問題（6.1）の略解．

(1) 正の実数 ε_1 をとる．$f(x) \to A\ (x \to a)$ という仮定より，

$$|f(x) - A| < \varepsilon_1 \qquad (x \in E^*(a;\delta_1)\ \text{のとき})$$

が成り立つ正数 δ_1 が取れる．この δ_1 が求めるもののひとつである．実際，

$$M = \begin{cases} |A| + \varepsilon_1 & a \notin E \text{のとき}, \\ \max\{|A| + \varepsilon_1, |f(a)|\} & a \in E \text{のとき} \end{cases}$$

と定めると，

$$(*) \qquad |f(x)| \leq M \qquad (x \in E \cap (a-\delta_1, a+\delta_1)\ \text{のとき})$$

が成り立つ．(*) より，$\delta = \delta_1$ のとき，f は $E \cap (a-\delta, a+\delta)$ 上有界である．

(2) $A > 0$ であると仮定する．$f(x) \to A\ (x \to a)$ の ε-δ 方式の定義文で，$\varepsilon = A$ の場合を考えて，

$$|f(x) - A| < A \qquad (x \in E^*(a;\delta_2)\ \text{のとき})$$

が成り立つ正数 δ_2 が取れることが分かる．この δ_2 が求めるもののひとつである．実際，$x \in E$ のとき，

$$|f(x) - A| < A \iff 0 < f(x) < 2A$$

が成り立つから，$\delta = \delta_2$ のとき，次が成り立つ．

$$f(x) > 0 \qquad (x \in E^*(a;\delta)\ \text{のとき}).$$

(3) $\varepsilon_3 = |A| - c$ とおく．仮定より，$\varepsilon_3 > 0$ である．$f(x) \to A\ (x \to a)$ の ε-δ 方式の定義文で，$\varepsilon = \varepsilon_3$ の場合を考えて，

$$|f(x) - A| < \varepsilon_3 \qquad (x \in E^*(a;\delta_3)\ \text{のとき})$$

が成り立つ正数 δ_3 が取れることが分かる．この δ_3 が求めるもののひとつである．実際，$|f(x) - A| < \varepsilon_3$ をみたす $x \in E$ に対して，

$$|f(x)| = |A + f(x) - A| \geq |A| - |f(x) - A| > |A| - \varepsilon_3 = c$$

が成り立つから，$\delta = \delta_3$ のとき次が成り立つ．

$$|f(x)| > c \qquad (x \in E^*(a;\delta)\ \text{のとき}).$$

問題 (6.4) の略解. 定理 (6.11), (6.12), 問題 (6.2) (2) は既知とする

(1) f は a の近くで有界であるから,

$$|f(x)| \leq M \qquad (x \in E^*(a;\delta_1) \text{ のとき})$$

が成り立つ正の実数 M, δ_1 が取れる. $h(x)=f(x)g(x)$ であるから,

$$-M|g(x)| \leq h(x) \leq M|g(x)| \qquad (x \in E^*(a;\delta_1) \text{ のとき})$$

が成り立つ. $g(x) \to 0$ $(x \to a)$ より, $|g(x)| \to 0$ $(x \to a)$. それゆえ, $x \to a$ のとき, $-M|g(x)|$, $M|g(x)|$ は 0 に収束する. よって, はさみうちの原理より, $h(x) \to 0$ $(x \to a)$.

(2) $\beta \neq 0$ であって, $g(x) \to \beta$ $(x \to a)$ であるから,

$$|g(x)-\beta| < |\beta| \qquad (x \in E^*(a;\delta_2) \text{ のとき})$$

が成り立つ正数 δ_2 が取れる.

($\Leftarrow$) について. $x \to a$ のとき, $f(x)$ は実数 A に収束するとする. 定理 (6.11) (2) より, $h(x)=f(x)g(x) \to A\beta$ $(x \to a)$.

($\Rightarrow$) について. $x \to a$ のとき, $h(x)$ は実数 B に収束するとする. $x \in E^*(a;\delta_2)$ のとき, $g(x) \neq 0$ であるから, $f(x)=\dfrac{h(x)}{g(x)}$. 定理 (6.11) (3) より, $E^*(a;\delta_2)$ 上の函数として, $f(x)$ は $x \to a$ のとき, $\dfrac{B}{\beta}$ に収束する. よって, E 上の函数としても, $f(x)$ は $x \to a$ のとき, $\dfrac{B}{\beta}$ に収束する.

問題 (7.2) の略解.

$a \in \mathbb{R}$ に対して, 定義より, $[a] \leq a < [a]+1$ が成り立つ. よって, $x \neq 0$ のとき, $\left[\frac{1}{x}\right] \leq \frac{1}{x} < \left[\frac{1}{x}\right]+1$. $x>0$ のときは, x 倍して, $f(x)=x\left[\frac{1}{x}\right] \leq 1 < x\left[\frac{1}{x}\right]+x = f(x)+x$. すなわち, $-x < f(x)-1 \leq 0$ が $x>0$ のとき成り立つ. $x<0$ のときは, $f(x) \geq 1 > f(x)+x$ であるから, $0 \leq f(x)-1 < -x$ が成り立つ. したがって, $x \in \mathbb{R}$ のとき,

$$|f(x)-1| \leq |x|$$

が成り立つ. この不等式より, f が 0 で連続であることが導かれる. 実際, 正数 δ が任意に与えられたとき, 正数 δ を, $\delta=\varepsilon$ と定めると,

$$|f(x)-f(0)|<\varepsilon \qquad (x\in\mathbb{R} \text{ かつ } |x-0|<\delta \text{ のとき})$$

が成り立つ。

問題(7.7)の略解.

(i) が不成立である場合に，(ii) が成り立つことを示す. 同値

(i) が不成立 $\iff$ $f(c)\geq 0$ となる $c\in\mathbb{R}$ が存在する

が成り立つ. さらに，右側の条件がみたされるときは，$f(c)>0$ となる $c\in\mathbb{R}$ の存否によって，次の (iii), (iv) に分かれる.

(iii) $f(x)\leq 0$ $(x\in\mathbb{R})$ が成り立ち，$f(c)=0$ となる $c\in\mathbb{R}$ が存在する.

(iv) $f(x)>0$ となる $x\in\mathbb{R}$ が存在する.

この二つのケースの中で，(iii) の場合には，0 が $f(\mathbb{R})$ の最大元となり，(ii) が成り立つ. (iv) が成り立つ場合を考える. $f(c)>0$ であ $c\in\mathbb{R}$ をひとつ取る. 仮定 $f(x)\to 0$ $(x\to-\infty)$ と $f(x)\to 0$ $(x\to+\infty)$ より，

$$|f(x)|<f(c) \qquad (x\in\mathbb{R} \text{ かつ } x<\ell_1 \text{ のとき})$$

$$|f(x)|<f(c) \qquad (x\in\mathbb{R} \text{ かつ } \ell_2<x \text{ のとき})$$

が成り立つ実数 ℓ_1, ℓ_2 が取れる. このとき，不等式 $|f(c)|<f(c)$ は不成立であるから，$c<\ell_1$ と $\ell_2<c$ はともに不成立である. すなわち，$\ell_1\leq c\leq \ell_2$ が成り立つ. もし，$\ell_1=\ell_2$ であるならば，$f(c)$ は $f(\mathbb{R})$ の最大元である. $\ell_1<\ell_2$ である場合を考える. 区間 $[\ell_1,\ell_2]$ 上でも f は連続であるから，$[\ell_1,\ell_2]$ 上での f の最大値が存在する. その最大値が $c_0\in[\ell_1,\ell_2]$ での値 $f(c_0)$ に一致するとしよう. この $f(c_0)$ が $f(\mathbb{R})$ の最大元である. 実際，$x<\ell_1$ あるいは $\ell_2<x$ であるときは，$f(x)\leq|f(x)|<f(c)\leq f(c_0)$. $x\in[\ell_1,\ell_2]$ のときは，c_0 の定め方より，$f(x)\leq f(c_0)$. よって，すべての $x\in\mathbb{R}$ に対して，$f(x)\leq f(c_0)$.

なお，$c\in[\ell_1,\ell_2]$ より，$f(c)\leq f(c_0)$ である.

資料訂正

(1) p63 問題(7.10) "このとき" のあとに, "I 上の実数値連続函数 f に対して" を追加する.

(2) p67 下から10行目 "E は $\mathbb{R}$ に" を "E は α に" と訂正する.

問題(8.6)の略解.

(1) $\mathrm{Arccos}\,x=\theta$ とおく. $0\le\theta\le\pi$ かつ $x=\cos\theta$ である. $0\le\theta\le\pi$ より, $\sin\theta\ge 0$. よって,

$$\sin(\mathrm{Arccos}\,x)=\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-x^2}.$$

(2) $\mathrm{Arcsin}\,x=\theta$ とおく. $|\theta|\le\frac{\pi}{2}$ かつ $x=\sin\theta$ である. $|\theta|\le\frac{\pi}{2}$ より, $\cos\theta\ge 0$. よって,

$$\cos(\mathrm{Arcsin}\,x)=\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-x^2}.$$

(3) $x\in(-1,1)$ とし, $\mathrm{Arcsin}\,x=\theta$ とおく. $|x|<1$ より, $|\theta|<\frac{\pi}{2}$ かつ $x=\sin\theta$ である. $|\theta|<\frac{\pi}{2}$ より $\cos\theta>0$. よって,

$$\tan(\mathrm{Arcsin}\,x)=\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(4) $x\in\mathbb{R}$ とし, $\mathrm{Arctan}\,x=\theta$ とおく. $|\theta|<\frac{\pi}{2}$ かつ $x=\tan\theta$ である. $|\theta|<\frac{\pi}{2}$ より, $\cos\theta>0$. よって,

$$\sin(\mathrm{Arctan}\,x)=\sin\theta=(\tan\theta)\cos\theta=\frac{\tan\theta}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2\theta}}}=\frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

6/7 の演習問題

問題(10.3)(2), 問題(10.5), 問題(12.1), 問題(12.4)(3).

6/21 のテストの出題範囲(問題の部分)

§1: (1.2) ~ (1.5), (1.7), §2: (2.1) ~ (2.14). 1, 2, 5
10, 11(1) 13,

§3: (3.1) ~ (3.5), §6: (6.1) ~ (6.7). 1, 4
3

§7: (7.1) ~ (7.10). §8: (8.1) ~ (8.6).
2, 7 1, 3(1) 6.

§9: (9.1) ~ (9.8). §10: (10.1) ~ (10.8).
6(1) 7 2, 3(1)(2)(3), 5

§12: (12.1) ~ (12.9).

問題 (9.6)(3) の略解　$E = \{x \in \mathbb{R} ;\ 0 < |x| < 1\}$ とおく．　E上で，

$$f(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\log(1+x)\right) = \exp\left(\frac{1}{x}(\log(1+x) - \log(1+0))\right)$$

であるから，函数 $f(x)$ は $(-1, 1)$ 上の函数 $g(t) = \log(1+t)$ を用いて，

$$f(x) = \exp\left(\frac{g(x) - g(0)}{x - 0}\right) \qquad (x \in E)$$

とあらわされる．　指数函数は定義域 $\mathbb{R}$ のすべての点で連続であって，函数 $g(t)$ は 0 で微分可能．　よって，合成函数の極限についての性質より，$x \to 0$ のとき，$f(x)$ は収束して，その極限は，

$$\exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{g(x) - g(0)}{x - 0}\right) = \exp\left(\frac{d}{dt}g(t)\Big|_{t=0}\right) = \exp(g'(0)) = \exp(1) = e.$$

(注)　$t \in \mathbb{R}$ に対して，$\exp(t) = e^t$ である．

問題 (10.3)(1) の略解．

$I = (0, +\infty)$ とおく．　I 上の函数 y^α を $g(y)$ とあらわす．

$x \in I$ とする．　$f(x) = (g(x+1) - g(x))/(x+1-x)$ であるから，区間 $[x, x+1]$ で函数 $g(y)$ に対して平均値の定理を用いて，

$$f(x) = g'(c_x) \quad かつ \quad x < c_x < x+1$$

が成り立つ $c_x \in \mathbb{R}$ が取れる．　$g'(y) = \alpha y^{\alpha-1}$ であるから，

$$\lim_{y\to+\infty} g'(y) = \begin{cases} 0 & 0 < \alpha < 1 \text{ のとき}, \\ 1 & \alpha = 1 \text{ のとき}, \\ +\infty & 1 < \alpha \text{ のとき}. \end{cases}$$

また，$x < c_x$ より，$c_x \to +\infty\ (x \to +\infty)$．　よって，合成函数の極限についての性質より，次を得る．

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \begin{cases} 0 & 0 < \alpha < 1 \text{ のとき}, \\ 1 & \alpha = 1 \text{ のとき}, \\ +\infty & 1 < \alpha \text{ のとき}. \end{cases}$$

問題(2.9)の略解．示すことを要求されているのは，

$$\{n\in\mathbb{N}\,;\,a_n\le b_n\}\text{ が無限集合 } \Longrightarrow \quad a\le b$$

という主張である．この主張の対偶は，

$$a>b \quad\Longrightarrow\quad \{n\in\mathbb{N}\,;\,a_n\le b_n\}\text{ は有限集合}$$

である．以下でこれを示す．$a>b$ であるとする．$\varepsilon=\frac{1}{2}(a-b)$ とおく．$\varepsilon>0$ である．$a_n\to a\ (n\to\infty)$ 及び $b_n\to b\ (n\to\infty)$ という仮定より，

$$|a_n-a|<\varepsilon \qquad (n\in\mathbb{N}\text{ かつ }n\ge N_1\text{ のとき})$$

$$|b_n-b|<\varepsilon \qquad (n\in\mathbb{N}\text{ かつ }n\ge N_2\text{ のとき})$$

が成り立つ自然数 N_1, N_2 が取れる．$N=\max\{N_1,N_2\}$ とおく．$n\in\mathbb{N}$ が，$n\ge N$ をみたすとすると，$n\ge N_1$ かつ $n\ge N_2$ であるから，

$$b_n< b+\varepsilon=\frac{1}{2}(a+b)=a-\varepsilon<a_n$$

が成り立つ．よって，$\{n\in\mathbb{N}\,;\,a_n\le b_n\}\subset\{n\in\mathbb{N}\,;\,n<N\}$．特に，$\{n\in\mathbb{N}\,;\,a_n\le b_n\}$ は有限集合．

問題(2.10)の略解

(1) $n=N$ のときは，$\frac{a_n}{a_N}=1=\frac{b_n}{b_N}$ となり，(1)の不等式は成り立つ．次に $n>N$ である場合を考える．仮定より，$N\le k\le n-1$ のとき，

$$0<a_k,\quad 0<b_k \text{ かつ } 0<\frac{a_{k+1}}{a_k}\le\frac{b_{k+1}}{b_k}$$

が成り立つから，

$$\frac{a_n}{a_N}=\frac{a_{N+1}}{a_N}\cdot\frac{a_{N+2}}{a_{N+1}}\cdots\frac{a_n}{a_{n-1}}\le\frac{b_{N+1}}{b_N}\cdot\frac{b_{N+2}}{b_{N+1}}\cdots\frac{b_n}{b_{n-1}}=\frac{b_n}{b_N}$$

となり，(1)の不等式が成り立つことが分かる．

(2) $b_n\to 0\ (n\to\infty)$ であるとする．(1)より，次が成り立つ．

(*) $$0<a_n\le\frac{a_N}{b_N}b_n \qquad (n\in\mathbb{N}\text{ かつ }n\ge N\text{ のとき})，$$

$b_n\to 0\ (n\to\infty)$ より，$\frac{a_N}{b_N}b_n\to 0\ (n\to\infty)$．不等式(*)は有限個の n を除いて成り立つから，はさみうちの原理より，$a_n\to 0\ (n\to\infty)$ である．

(3) $a_n \to +\infty$ $(n \to \infty)$ であるとする. (1) より, 次が成り立つ.

$$(**) \qquad \frac{b_N}{a_N} a_n \le b_n \qquad (n \in \mathbb{N} \text{ かつ } n \ge N \text{ のとき}).$$

これを用いて, $b_n \to +\infty$ $(n \to \infty)$ を示す. 実数 M が任意に与えられたとする. $a_n \to +\infty$ $(n \to \infty)$ であるから,

$$(***) \qquad \frac{a_N}{b_N} M \le a_n \qquad (n \in \mathbb{N} \text{ かつ } n \ge n_0 \text{ のとき})$$

が成り立つ自然数 n_0 が取れる. $N' = \max\{n_0, N\}$ と定めると, $n \ge N'$ である $n \in \mathbb{N}$ に対して, (**) と (***) より,

$$M = \frac{b_N}{a_N} \cdot \frac{a_N}{b_N} M \le \frac{b_N}{a_N} a_n \le b_n$$

が成り立つ. $b_n \to +\infty$ $(n \to \infty)$ が示された.

問題 (2.11) (1) の略解.

有限個の n を除いて $1 + \frac{c}{n} \le \frac{a_{n+1}}{a_n}$ が成り立つと仮定する. この仮定より,

$$(*) \qquad 1 + \frac{c}{n} \le \frac{a_{n+1}}{a_n} \qquad (n \in \mathbb{N} \text{ かつ } n \ge N \text{ のとき})$$

が成り立つ自然数 N が取れる. $0 < c$ より $1 < mc$ である自然数 m が取れる (アルキメデスの原理). (*) と二項定理より, $n \ge N$ のとき,

$$\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^m \ge \left(1 + \frac{c}{n}\right)^m \ge 1 + \frac{mc}{n} \ge 1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n}$$

が成り立つ. 数列 $\{n\}$ と $\{(a_n)^m\}$ とに対して問題 (2.10) の (1) の結果を適用して,

$$(a_n)^m \ge \frac{(a_N)^m}{N} \cdot n \qquad (n \in \mathbb{N} \text{ かつ } n \ge N \text{ のとき})$$

が成り立つことが分かる. この不等式より, $a_n \to +\infty$ $(n \to \infty)$ であることを導く.

実数 M が任意に与えられたとする. アルキメデスの原理より, $|M|^m < \frac{(a_N)^m}{N} n_1$ をみたす自然数 n_1 が取れる. $N' = \max\{N, n_1\}$ と定める. $n \ge N'$ である $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$(a_n)^m \ge \frac{(a_N)^m}{N} n \ge \frac{(a_N)^m}{N} n_1 > |M|^m$$

が成り立つ. 同値 " $(a_n)^m > |M|^m \Leftrightarrow a_n > |M|$ " と $M \le |M|$ より,

(**) $$a_n > M \qquad (n \in \mathbb{N} \text{ かつ } n \geq N' \text{のとき})$$

が成り立つ．以上より，実数 M が与えられたとき，M が何であっても (**) が成り立つ自然数 N' が取れることが分かった．すなわち，$a_n \to +\infty \ (n \to \infty)$ であることが示された．

問題（2.13）の略解．

(1) n は自然数．二項定理より

$$\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\left(\frac{a}{n}\right)^k$$

であるから，

$$\left|\left(1+\frac{a}{n}\right)^n - 1\right| \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\frac{|a|^k}{n^k} \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}|a|^k.$$

$k \geq 1$ のとき，$k! = k\cdot(k-1)\cdots 2 \geq 2^{k-1}$ であるから，$|a| < 2$ のとき，

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}|a|^k = |a|\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}|a|^{k-1} = |a|\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{|a|}{2}\right)^{k-1} = |a|\frac{1-\left(\frac{|a|}{2}\right)^n}{1-\frac{|a|}{2}} \leq \frac{|a|}{1-\frac{|a|}{2}}.$$

以上より，(1) の不等式を得る．

(2) $a_n \to 0 \ (n \to \infty)$ であると仮定する．仮定より，

$$|a_n| < 1 \qquad (n \in \mathbb{N} \text{ かつ } n \geq N \text{のとき})$$

が成り立つ自然数 N が取れる．(1) の結果より，

$$|b_n - 1| \leq 2|a_n| \qquad (n \in \mathbb{N} \text{ かつ } n \geq N \text{のとき})$$

である．仮定より，$2|a_n| \to 0 \ (n \to \infty)$．よって，はさみうちの原理より，$|b_n - 1| \to 0 \ (n \to \infty)$．すなわち，$b_n \to 1 \ (n \to \infty)$．

問題（3.3）(1) の略解．

β は正の実数．$d_n = 1 - \frac{\beta}{n} \ (n \in \mathbb{N})$ とおく．$n \in \mathbb{N}$ かつ $n \neq \beta$ のとき，

$$\frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{1-\frac{\beta}{n+1}}{1-\frac{\beta}{n}} = 1 + \frac{\frac{\beta}{n}-\frac{\beta}{n+1}}{1-\frac{\beta}{n}} = 1 + \frac{\beta}{n(n+1)}\frac{1}{1-\frac{\beta}{n}} = 1 + \frac{\beta}{(n+1)(n-\beta)} = 1 + \frac{\beta_n}{n^2}.$$

ただし，$\beta_n = \dfrac{\beta n^2}{(n+1)(n-\beta)} = \dfrac{\beta}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{\beta}{n}\right)}$．よって，$\beta_n \to \beta \ (n \to \infty)$．

それゆえ，$c < \beta$ であるとき，$N' > \beta$ であって，

$$c < \beta_n \qquad (n \in \mathbb{N} \text{ かつ } n \geq N' \text{ のとき})$$

が成り立つ自然数 N' が取れる．このとき，

$$1 + \frac{c}{n^2} < 1 + \frac{\beta_n}{n^2} = \frac{d_{n+1}}{d_n} \qquad (n \in \mathbb{N} \text{ かつ } n \geq N' \text{ のとき})$$

が成り立つ．$b_n = \max\{d_n, d_{N'}\}$ $(n \in \mathbb{N})$ と定め，$N'' = \max\{N, N'\}$ と定めると，$n \geq N''$ かつ $n \in \mathbb{N}$ のとき，

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 + \frac{c}{n^2} < \frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

が成り立つ．以上のように，$c < \beta$ である $\beta \in \mathbb{R}$ を取り，数列 $\{b_n\}$ を定めると，$\{b_n\}$ は問題 (3.2)(1) の条件をみたす．よって，問題 (3.2)(1) の結果を適用して，$\{a_n\}$ は負でない実数に収束することが分かる．

問題 (6.3) の略解.

$\inf f(I) = A$ とおく．正数 ε を任意にとる．A は $f(I)$ の最大下界であるから，A より大きい $A + \varepsilon$ は $f(I)$ の下界ではない．よって，$f(c) < A + \varepsilon$ である $c \in I$ が取れる．f は，I 上広義単調増加であるから，$a < x < c$ である $x \in I$ に対して，

$$A \leq f(x) \leq f(c) < A + \varepsilon$$

が成り立つ．よって，

$$|f(x) - A| < \varepsilon \qquad (x \in (a, c) \text{ のとき})$$

が成り立つ．$\delta = c - a$ と定めれば，$\delta > 0$ かつ $(a, c) = (a, a+\delta)$．

以上より，$\varepsilon > 0$ である各 $\varepsilon \in \mathbb{R}$ に対して，正数 δ が存在して，

$$|f(x) - A| < \varepsilon \qquad (x \in I \text{ かつ } a < x < a+\delta \text{ のとき})$$

が成り立つことが分かった．すなわち，$f(x) \to A$ $(x \to a+0)$ である．

問題 (7.4) の略解. I 上の実数値函数 g を, $g(x) = x - f(x)$ $(x \in I)$ によって定める. f が I 上連続であるから, g も I 上連続である. また, $c \in I$ に対して同値 " $f(c) = c \iff g(c) = 0$ " が成り立つから, $g(c)=0$ である I の元 c が存在することを示せば充分である.

a は I の最小元であって, $f(a) \in I$ であるから, $g(a) = a - f(a) \leq 0$. 同様に, b は I の最大元かつ $f(b) \in I$ より, $g(b) \geq 0$. $g(a) = 0$ のときは, $c=a$ のとき $f(c) = c$ が成り立ち, $g(b) = 0$ のときは $c=b$ のとき $f(c) = c$ が成り立つ. $g(a) \neq 0$ かつ $g(b) \neq 0$ のときは, $g(a) < 0 < g(b)$ であるから, 中間値の定理より, $g(c) = 0$ となる $c \in (a, b)$ が存在する.

問題 (7.5) の略解

$f(x) \to +\infty$ $(x \to +\infty)$ という仮定より,

(*) $\quad f(a) < f(x) \quad (x \in I$ かつ $x > b_0$ のとき$)$

が成り立つ実数 b_0 が取れる. $\max\{a, b_0\} < b$ である実数 b をとる. 区間 $J = [a, b]$ 上でも f は連続であるから, f は J 上の函数としての最小値を持つ. この最小値が, J の元 c での値 $f(c)$ であるとする. この $f(c)$ は, $I = [a, +\infty)$ 上の函数としての f の最小値である. それは, 次の (i), (ii) より分かる. $x \in I$ とする

(i) $a \leq x \leq b$ のとき, $x \in J$ であるから, $f(x) \geq \min f(J) = f(c)$.

(ii) $b < x$ のとき. このときは, (*) と $a \in J$ より, $f(x) > f(a) \geq \min f(J)$.

問題 (7.6) の略解.

$I = [0, L]$ と定める. このとき, $f(I) = f(\mathbb{R})$ が成り立つ. というのは, $x \in \mathbb{R}$ に対して, $0 \leq x + nL$ となる最小の整数 n をとると, $x + (n-1)L < 0$ であるから, $0 \leq x + nL < L$ が成り立つ. 特に, $x + nL \in I$. また, 函数 f に対する仮定より, $f(x + mL) = f(x)$ が任意の $x \in \mathbb{R}$ と任意の $m \in \mathbb{Z}$ に対して成り立つ. よって,

$f(x) = f(x+nL) \in f(I)$. したがって，$f(\mathbb{R}) \subset f(I)$. $I \subset \mathbb{R}$ であるから，$f(I) \subset f(\mathbb{R})$. $f(I) = f(\mathbb{R})$ が示された.

また，f は $\mathbb{R}$ 上連続であるから，I 上でも連続である. I は有界閉区間であるから，$f(I)$ の最大元が存在する. $f(I) = f(\mathbb{R})$ であるから，$f(\mathbb{R})$ の最大元も存在する. すなわち，f は $\mathbb{R}$ 上の函数としての最大値を持つ.

<u>問題（8.1）の略解.</u>

E は区間，f は E 上の実数値連続函数. さらに，f は E 上単射であるとする. $S = \{f(y) - f(x) ; x, y \in E$ かつ $x < y\}$. p62 問題（7,8）の結果と f が単射であることより，S は区間. また，f が単射であることより，$0 \notin S$. 区間の定義（p42－43（5,2,1））より，同値

S は区間かつ $0 \notin S \iff S \subset (-\infty, 0)$ あるいは $S \subset (0, +\infty)$

が成り立つ. $S \subset (-\infty, 0)$ のとき，f は E 上狭義単調減少であり，$S \subset (0, +\infty)$ のとき，f は E 上狭義単調増加である.

<u>問題（8.3）(1) の略解.</u>

単調増加函数の極限の性質（p52（6.8.2））より，$c = \inf f(I)$，$d = \sup f(I)$. また，f が I 上狭義単調増加であるから，$f(I)$ の最小元も最大元も存在しない. 実際，$x \in I$ とすると，$a < x < b$ より，$a < \alpha < x < \beta < b$ である I の元 α, β が取れる. この α, β に対して $f(\alpha) < f(x) < f(\beta)$ が成り立つ. 特に，$f(x)$ は $f(I)$ の最小元でも最大元でもない. このことが，任意の $x \in I$ に対して成り立つから，$f(I)$ の最小元も最大元も存在しない. 中間値の定理の系（7.4.2）より，$f(I)$ は区間である. 以上の結果と，p43（5,2,2）の結果を合わせると $f(I) = (c, d)$ であることが分かる.

問題（9.7）の略解. 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は問題の条件 (i), (ii) をみたすとする. f は, c で微分可能であるから, 区間 (a, b) 上の実数値函数 $Q(x)$ で, 次の (iii), (iv) をみたすものが取れる.

(iii) $f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + Q(x)(x-c) \quad (x \in (a, b))$.

(iv) 函数 $Q(x)$ は c で連続かつ $Q(c) = 0$.

(iii) で, $x = a_n$ の場合と $x = b_n$ の場合を用いて,

$$(*) \qquad \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} = f'(c) + Q(b_n)\frac{b_n - c}{b_n - a_n} + Q(a_n)\frac{c - a_n}{b_n - a_n} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

を得る. 条件 (i) より, $|b_n - c| \leq |b_n - a_n|$, $|c - a_n| \leq |b_n - a_n|$ が成り立つ ($n \in \mathbb{N}$). 条件 (ii) とはさみうちの原理より, $b_n \to c$ $(n \to \infty)$ かつ $a_n \to c$ $(n \to \infty)$ である. このことと上記 (iv) より,

$$Q(b_n) \to 0 \ (n \to \infty) \quad \text{かつ} \quad Q(a_n) \to 0 \ (n \to \infty).$$

また, 条件 (i) と等式 (*) より, 次を得る.

$$\left| \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} - f'(c) \right| \leq |Q(b_n)| + |Q(a_n)| \quad (n \in \mathbb{N}).$$

この不等式の右辺は, $n \to \infty$ のとき 0 に収束するから, はさみうちの原理より, $\dfrac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} - f'(c) \to 0$ $(n \to \infty)$. すなわち, $\dfrac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} \to f'(c)$ $(n \to \infty)$.

問題(9.1)(1)の略解.

$f'(c)>0$ であるとする. $x\to c$ のとき, $\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}$ は $f'(c)$ に収束するから, 次が成り立つ正数 δ が取れる.

$$\left|\frac{f(x)-f(c)}{x-c}-f'(c)\right| < f'(c) \qquad (x\in I^*(c;\delta) \text{ のとき}).$$

特に, $x\in I^*(c;\delta)$ のとき, $\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}>0$ である.

I は開区間であって, $c\in I$ であるから, $I\cap(c-\delta,c)$ と $I\cap(c,c+\delta)$ は, ともに空ではない. α,β を, $\alpha\in I\cap(c-\delta,c)$, $\beta\in I\cap(c,c+\delta)$ をみたすように取る.

$u\in(\alpha,c)$ のとき, $u\in I^*(c;\delta)$ であるから, $0<\dfrac{f(u)-f(c)}{u-c}$. また, $u<c$ より, $u-c<0$. よって, $f(u)-f(c)<0$. すなわち, $f(u)<f(c)$. $v\in(c,\beta)$ のとき, $0<v-c$ かつ $0<\dfrac{f(v)-f(c)}{v-c}$. よって, $0<f(v)-f(c)$. すなわち, $f(c)<f(v)$.

問題(9.6)の略解.

(1) $\mathbb{R}$ 上の函数 $g(t)=a^t$ を用いて, $f(x)$ は $(0,+\infty)$ 上で,

$f(x)=\dfrac{a^{\frac{1}{x}}-a^0}{\frac{1}{x}}=\dfrac{g(\frac{1}{x})-g(0)}{\frac{1}{x}-0}$ とあらわされる. ここで, $\frac{1}{x}\to 0$ $(x\to+\infty)$ かつ $t\to 0$ のとき, $\dfrac{g(t)-g(0)}{t-0}$ は $\dfrac{d}{dt}g(t)\Big|_{t=0}=(\log a)a^0$ に収束するから, 合成函数の極限の性質より, $x\to+\infty$ のとき $f(x)$ は $\log a$ に収束する.

(2) $E=\{x\in\mathbb{R}\,;\,x\neq 0\}$ 上で, $f(x)=\frac{1}{x}(a^x-a^0)-\frac{1}{x}(b^x-b^0)$ が成り立つ. $x\to 0$ のとき $\frac{1}{x}(a^x-a^0)$ は $\dfrac{d}{dx}a^x\Big|_{x=0}=(\log a)a^0$ に収束し, $\frac{1}{x}(b^x-b^0)$ は $\dfrac{d}{dx}b^x\Big|_{x=0}=(\log b)b^0$ に収束する. よって, $x\to 0$ のとき $f(x)$ は

$$\left(\frac{d}{dx}a^x-\frac{d}{dx}b^x\right)\Big|_{x=0}=\log a-\log b=\log\left(\frac{a}{b}\right)$$

に収束する.

(4) $\mathbb{R}$上の函数 $g(t)=\log\left(\frac{1}{2}(a^t+b^t)\right)$ を用いて, $x\neq 0$ のとき, $f(x)$は

$$f(x)=\exp\left(\frac{1}{x}\log\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)\right)=\exp\left(\frac{1}{x}(g(x)-g(0))\right)$$

とあらわされる. ここで, $\frac{1}{x}(g(x)-g(0))$ は, $x\to 0$ のとき,

$$\frac{d}{dx}g(x)\Big|_{x=0}=\frac{2}{a^x+b^x}\cdot\frac{(\log a)a^x+(\log b)b^x}{2}\Big|_{x=0}=\frac{1}{2}\log(ab)$$

に収束する. 指数函数は定義域のすべての点で連続であるから, 合成函数の極限についての性質より, $x\to 0$ のとき $f(x)$は,

$$\exp(g'(0))=\exp\left(\frac{1}{2}\log(ab)\right)=\sqrt{ab}$$

に収束する.

問題(10.2)の略解.

$a_n\to c\ (n\to\infty)$, $b_n\to c\ (n\to\infty)$ かつ $a<a_n<b_n<c\ (n\in\mathbb{N})$ が成り立つとする. 各 $n\in\mathbb{N}$ に対して, 区間 $[a_n,b_n]$ 上で函数 f は微分可能であるから, 平均値の定理より,

$$\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}=f'(c_n) \quad かつ \quad a_n<c_n<b_n$$

をみたす $c_n\in\mathbb{R}$ が取れる. $a_n\to c\ (n\to\infty)$ かつ $b_n\to c\ (n\to\infty)$ であるから, はさみうちの原理より, $c_n\to c\ (n\to\infty)$. 函数 f' は, cで連続であるから, $f'(c_n)\to c\ (n\to\infty)$. すなわち, 次が成り立つ.

$$\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}\longrightarrow f'(c)\quad (n\to\infty).$$

問題(10.3)(2)の略解. $g(y)=y^\alpha\ (y\in(0,+\infty))$ と定める.

$I=\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ とおく. $x\in I$ のとき, $x^2+1<x^2+2x$ であって,

$$f(x)=\frac{g(x^2+2x)-g(x^2+1)}{(x^2+2x)-(x^2+1)}\cdot(2x-1)$$

とあらわせるから, 函数 $g(y)$ に対して, 区間 $[x^2+1,x^2+2x]$ で平均値の定理を用いると,

$$f(x) = g'(c_x)(2x-1) \quad \text{かつ} \quad x^2+1 < c_x < x^2+2x$$

が成り立つ $c_x \in \mathbb{R}$ が取れることが分かる. $f_1(x) = g'(x^2+1)(2x-1)$, $f_2(x) = g'(x^2+2x)(2x-1)$ とおく. 函数 $g'(y)$ は区間 $(0, +\infty)$ 上で広義単調であるから, $x \in I$ のとき,

$$\min\{f_1(x), f_2(x)\} \le f(x) \le \max\{f_1(x), f_2(x)\}.$$

よって, 函数 $f_1(x)$ と $f_2(x)$ が $x \to +\infty$ のとき同じ極限を持つならば その極限は, $f(x)$ の極限でもある. $x \in I$ のとき, $f_1(x) = \alpha\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\alpha-1}\left(2-\frac{1}{x}\right)x^{2\alpha-1}$, $f_2(x) = \alpha\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}\left(2-\frac{1}{x}\right)x^{2\alpha-1}$ であることから, 次が分かる.

$$\lim_{x\to\infty} f_1(x) = \lim_{x\to\infty} f_2(x) = \begin{cases} 0 & 0 < \alpha < \frac{1}{2} \text{ のとき}, \\ 1 & \alpha = \frac{1}{2} \text{ のとき}, \\ +\infty & \frac{1}{2} < \alpha \text{ のとき}, \end{cases}$$

以上より, 次が分かる.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \begin{cases} 0 & 0 < \alpha < \frac{1}{2} \text{ のとき}, \\ 1 & \alpha = \frac{1}{2} \text{ のとき}, \\ +\infty & \frac{1}{2} < \alpha \text{ のとき}. \end{cases}$$

問題（10.5）の略解．

$n \in \mathbb{N}$ とする． $a_n \neq a_{n+1}$ のときは，平均値の定理より，

$$a_{n+2} - a_{n+1} = f(a_{n+1}) - f(a_n) = f'(c_n)(a_{n+1} - a_n)$$

が成り立つ a_n と a_{n+1} との間の数 c_n が取れる（$a_n < a_{n+1}$ の場合も $a_{n+1} < a_n$ の場合も成立）． $c_n \in I$ であるから，$|f'(c_n)| \leq r$． よって，

(*) $$|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq r\,|a_{n+1} - a_n|$$

が成り立つ． また，$a_n = a_{n+1}$ のとき，$a_{n+1} = f(a_n) = f(a_{n+1}) = a_{n+2}$ であるから，この場合も不等式(*)は成り立つ． $m \in \mathbb{N}$ とし，$n < m$ であるすべての自然数 n に対する(*)を用いて，

$$|a_{m+1} - a_m| \leq r^{m-1}|a_2 - a_1|$$

を得る． $r^{m-1}|a_2 - a_1| = \frac{|a_2 - a_1|}{1-r}(r^{m-1} - r^m)$ であるから，$b_n = -\frac{|a_2 - a_1|}{1-r}r^{n-1}$ $(n \in \mathbb{N})$ とおくと，

$$|a_{n+1} - a_n| \leq b_{n+1} - b_n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

が成り立つ． $|b_n| \leq |a_2 - a_1|/(1-r)$ $(n \in \mathbb{N})$ より，数列 $\{b_n\}$ は有界． p28 問題（3.1）(2) より，$\{a_n\}$ は収束する．

問題(15.1)の解答. (1) 発散する. (2) 0 に収束する. 以下は, その理由.

(1) 実数 θ を取り, 固定する. このとき, 函数 $f(t\cos\theta, t\sin\theta)$ が $t \to 0$ のとき収束するか見てみよう. $t \neq 0$ のとき,

$$f(t\cos\theta, t\sin\theta) = \frac{t^3(\cos^3\theta + \sin^3\theta) + 3t^2\cos\theta\sin\theta}{t^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)} = t(\cos^3\theta + \sin^3\theta) + \frac{3}{2}\sin 2\theta.$$

よって, $f(t\cos\theta, t\sin\theta) \to \frac{3}{2}\sin 2\theta \quad (t \to 0)$. もし $(x, y) \to (0, 0)$ のとき, $f(x, y)$ が実数 ℓ に収束するならば, θ が何であっても, $t \to 0$ のとき $f(t\cos\theta, t\sin\theta)$ は θ に依存しない値 ℓ に収束する. これは, 上記の結果に反する. (例えば, $\theta = 0$ のときは 0 に収束し, $\theta = \frac{\pi}{4}$ のときは $\frac{3}{2}$ に収束する.) すなわち, $(x, y) \to (0, 0)$ のとき $f(x, y)$ は収束しない.

(2) $\theta \in \mathbb{R}$ とする. $t \to 0$ のときの函数 $f(t\cos\theta, t\sin\theta)$ の極限を求める. $t \neq 0$ のとき, $f(t\cos\theta, t\sin\theta) = \dfrac{t^3(\cos^3\theta - \sin^3\theta)}{t^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)} = t(\cos^3\theta - \sin^3\theta)$.

よって, $f(t\cos\theta, t\sin\theta) \to 0 \quad (t \to 0)$. よって, $(x, y) \to (0, 0)$ のとき函数 $f(x, y)$ が収束するならば, 極限は 0 である. これが成り立つか否かを調べる.

$|x| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$ かつ $|y| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$ であるから,

$$|x^3 - y^3| \leq |x|^3 + |y|^3 \leq (\sqrt{x^2 + y^2})^3 + (\sqrt{x^2 + y^2})^3 = 2(\sqrt{x^2 + y^2})^3.$$

この不等式より,

$$|f(x, y)| \leq 2\sqrt{x^2 + y^2} \qquad ((x, y) \in U)$$

であることが分かる. $\sqrt{x^2 + y^2} \to 0 \quad ((x, y) \to (0, 0))$ であるから, 函数 $f(x, y)$ は, $(x, y) \to (0, 0)$ のとき 0 に収束する.