解答例，コメント等

問題 2.1 の解答例

(1) $h \neq 0$ の時，$\dfrac{f(h)-f(0)}{h} = \dfrac{|h|^p h - 0}{h} = |h|^p$ であり，$p > 0$ より，

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} |h|^p = 0$$

である．従って，$f(x)$ は $x=0$ で微分可能である．

(2) この問題は授業で扱った．$h \neq 0$ の時，$\dfrac{f(h)-f(0)}{h} = \dfrac{h\sin\frac{1}{h} - 0}{h} = \sin\dfrac{1}{h}$ であるが，

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \sin\frac{1}{h}$$

は存在しない（授業で扱った有名な事実）．従って，$f(x)$ は $x=0$ で微分可能ではない．

問題 2.2 の解答例

証明. (1) $x \neq 0$ の時，$f(x)$ は明らかに微分可能で，

$$f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}.$$

$f(x)$ の $x=0$ での微分可能性を考える．$h \neq 0$ の時，

$$\frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{h^2\sin\frac{1}{h} - 0}{h} = h\sin\frac{1}{h}$$

である．

$$\left| h\sin\frac{1}{h} \right| \leq |h| \to 0, \qquad (h \to 0)$$

なので，

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} h\sin\frac{1}{h} = 0.$$

従って，$f(x)$ は $x=0$ で微分可能で，$f'(0)=0$. 以上より，$f(x)$ は $\mathbb{R}$ 上微分可能で，導関数は

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}, & x \neq 0 \text{ の時}, \\ 0, & x = 0 \text{ の時} \end{cases}$$

である．

(2) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0}\left(2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right)$ は存在しないので，$f'(x)$ は $x=0$ で連続ではない．($\displaystyle\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$ が存在しない事に注意せよ.) □

問題 2.3 の解答例

証明. $f(x)$ が $[a,b]$ 上 C^1 級なので，$|f'(x)|$ は閉区間 $[a,b]$ 上連続であるから，$|f'(x)|$ は閉区間 $[a,b]$ で最大値を持つ．

$$M = \max_{x\in[a,b]} |f'(x)|$$

とおく．$x \neq y$ の場合を考える．($x = y$ の時は示すべき不等式の両辺は 0 となり成立する．) 平均値の定理より，x と y の間の数 c が存在して，

$$f(x) - f(y) = f'(c)(x-y)$$

が成り立つが，$|f'(c)| \le M$ より，

$$|f(x) - f(y)| = |f'(c)||x-y| \le M|x-y|$$

である．(M は x, y に依存しない事に注意する．) 従って，$L = M$ とすれば，示すべき不等式が得られる． □

問題 2.4 について

ロピタルの定理を用いて不定形の関数の極限を求める計算問題である．ロピタルの定理を適切な回数（不定形が解消される最低の回数）適用すればよい．答は，(1) $\frac{1}{2}$, (2) 0.

問題 2.5 について

この問題は，テイラーの定理を $a=0$ の場合に（つまりマクローリンの定理を）具体的な関数に適用するだけの計算問題である．(k 階導関数を求めて書き下すだけである．) 一部は授業で扱った．