

数学IA (理I 10-15), (夏学期) 参考問題 No. 2

(2010年6月2日)

この参考問題は、学習の参考に提供しているだけで、レポートの提出等を求めている訳ではありません。(提出しようとしても受け取りません。) 参考問題の趣旨は、参考問題 No. 1 の冒頭に書いた通りです。

1 変数関数の微分

問題 2.1. 次の関数 $f(x)$ が $x = 0$ で微分可能であるかどうかを判定せよ.

(1) $f(x) = |x|^p x$, (但し, p は正の定数)

(2) $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \text{ の時,} \\ 0, & x = 0 \text{ の時} \end{cases}$

問題 2.2. \mathbb{R} 上の関数 f を

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \text{ の時,} \\ 0, & x = 0 \text{ の時} \end{cases}$$

によって定義する. 以下を証明せよ.

(1) $f(x)$ は \mathbb{R} 上微分可能である.

(2) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は $x = 0$ で連続でない. (このことから, $f(x)$ は \mathbb{R} 上で C^1 級でない事が分かる.)

問題 2.3. 関数 $f(x)$ は閉区間 $[a, b]$ で C^1 級であるとする. この時, 或る定数 $L > 0$ が存在して, 任意の $x, y \in [a, b]$ に対して以下が成り立つ事を証明せよ.

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|.$$

問題 2.4. 次の「関数の極限」を求めよ.

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2 \cos x}$ (2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^\alpha}{a^x}$, (但し, $a > 1, \alpha > 0$ は定数である.)

問題 2.5. 以下を証明せよ.

(1) 任意の自然数 n と任意の実数 x に対して, 或る $\theta \in (0, 1)$ が存在して,

$$e^x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^{\theta x}}{n!} x^n.$$

(2) 任意の自然数 n と任意の実数 x に対して, 或る $\theta \in (0, 1)$ が存在して,

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + \frac{(-1)^n \cos \theta x}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

(3) 任意の自然数 n と任意の実数 x に対して, 或る $\theta \in (0, 1)$ が存在して,

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + \frac{(-1)^n \cos \theta x}{(2n)!} x^{2n}.$$

(4) 任意の自然数 n と任意の $x > -1$ に対して, 或る $\theta \in (0, 1)$ が存在して,

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + \frac{(-1)^{n-1}}{n(1+\theta x)^n} x^n.$$