(2) 答は，$f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ は点 $(0,0)$ で全微分可能ではない．その理由（証明）は以下の通りである．

$h\neq 0$ とすると，$f(0,0)=0$, $f(h,0)=0$ であるから，$\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\frac{0-0}{h}=0$ なので，$f(x,y)$ は点 $(0,0)$ で x について偏微分可能で，$f_x(0,0)=0$ である．同様に，$f(x,y)$ は点 $(0,0)$ で y について偏微分可能で，$f_y(0,0)=0$ である事が分かる．点 $(0,0)$ の周りで

$$f(x,y)=f(0,0)+f_x(0,0)x+f_y(0,0)y+\sqrt{x^2+y^2}G(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}G(x,y)$$

かつ $G(0,0)=0$ が成り立つとすると，

$$G(x,y)=\begin{cases}\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\text{ の時},\\ 0, & (x,y)=(0,0)\text{ の時}\end{cases}$$

である．しかし，$G(x,y)$ は点 $(0,0)$ で連続ではない．何故ならば，$x\neq 0$ の時，$G(x,0)=0$, $G(x,x)=\frac{1}{\sqrt{2}}$ であるから，極限 $\lim_{(x,y)\to(0,0)}G(x,y)$ が存在しないからである．従って，$f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ は点 $(0,0)$ で全微分可能ではない．

問題 3.5 の解答例

2変数関数の極値に関する計算問題である．略解のみ書いておく．具体的な計算過程は各自で確かめること．

(1) $f_x(x,y)=f_y(x,y)=0$ を満たす点は $(x,y)=(0,0)$ のみ（極値をとるとすればこの点のみ）で，極小値の定義から $f(x,y)$ は点 $(0,0)$ で極小値 0 をとる．

(2) $f_x(x,y)=f_y(x,y)=0$ を満たす点は $(x,y)=(0,0),(1,1)$（極値をとるとすればこれらの点のみ）である．2階偏導関数を用いた極値判定の定理から，$f(x,y)$ は点 $(1,1)$ で極小値 -1 をとり，点 $(0,0)$ では極値をとらない．

(3) $f_x(x,y)=f_y(x,y)=0$ を満たす点は $(x,y)=(0,0),(0,\pm1),(\pm1,0)$（極値をとるとすればこれらの点のみ）である．2階偏導関数を用いた極値判定の定理から，$f(x,y)$ は，点 $(0,0)$ で極小値 0，点 $(0,\pm1)$ で極大値 $\frac{4}{e}$ をとり，点 $(\pm1,0)$ では極値をとらない．

ボルツァノ・ワイエルストラスの定理の証明

定理 (ボルツァノ・ワイエルストラスの定理（講義ノートの定理 1.9）).
有界な数列は，収束する部分列を持つ．

証明. $\{a_n\}$ を有界な数列とする．この時，或る実数 p_1, q_1 が存在して，任意の自然数 n に対して $p_1 \leq a_n \leq q_1$ が成り立つ．$I_1 = [p_1, q_1]$ とおく．閉区間 I_1 を中点 $\frac{p_1+q_1}{2}$ で分ける．2つの閉区間 $[p_1, \frac{p_1+q_1}{2}]$ と $[\frac{p_1+q_1}{2}, q_1]$ のうち少なくとも一方は $\{a_n\}$ の項を無限個含む事に注意して，それを $I_2 = [p_2, q_2]$ とする．(両方とも $\{a_n\}$ の項を無限個含む時はどちらを I_2 としてもよい.) 同様に，閉区間 I_2 を中点 $\frac{p_2+q_2}{2}$ で分け，2つの閉区間 $[p_2, \frac{p_2+q_2}{2}]$ と $[\frac{p_2+q_2}{2}, q_2]$ のうち $\{a_n\}$ の項を無限個含む方を $I_3 = [p_3, q_3]$ とする．この操作を繰り返して，閉区間 $I_n = [p_n, q_n]$ を作る．

先ず，数列 $\{p_n\}$ と $\{q_n\}$ が収束し，$\{p_n\}$ と $\{q_n\}$ の極限値が等しい事を証明する．$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots$ なので，

$$p_1 \leq p_2 \leq \cdots \leq p_n \leq \cdots q_n \leq \cdots \leq q_2 \leq q_1$$

である．従って，$\{p_n\}$ は上に有界な増加列で，$\{q_n\}$ は下に有界な減少列なので，数列 $\{p_n\}$ と $\{q_n\}$ はともに収束する．$\alpha = \lim_{n\to\infty} p_n$, $\beta = \lim_{n\to\infty} q_n$ とおく．区間 I_{n+1} の長さは区間 I_n の長さの半分なので，

$$q_{n+1} - p_{n+1} = \frac{1}{2}(q_n - p_n)$$

である．従って，

$$q_n - p_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(q_1 - p_1) \longrightarrow 0, \quad (n \to \infty)$$

であり，$\alpha = \beta$ が従う．

次の様にして，$\{a_n\}$ の収束部分列を構成する．$a_{n_1} \in I_1$ を任意にとる．I_2 は $\{a_n\}$ の項を無限個含むので，「$n_2 > n_1$ かつ $a_{n_2} \in I_2$」を満たす自然数 n_2 が存在する．この議論を繰り返して，任意の自然数 k に対して，

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_k \quad \text{かつ} \quad a_{n_k} \in I_k$$

を満たす自然数 n_k が取れる．従って，$\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ は自然数の増加列で，任意の自然数 k に対して $p_k \leq a_{n_k} \leq q_k$ が成り立つ．$p_k \to \alpha$, $q_k \to \alpha$, $(k \to \infty)$ なので，挟み撃ちの原理から，$a_{n_k} \to \alpha$, $(k \to \infty)$ である．従って，(この様にして構成した) 部分列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ は収束する． □