数学IA（理I 10–15），（夏学期）　参考問題 No. 3

（2010年6月30日）

この参考問題は，学習の参考に提供しているだけで，**レポートの提出等を求めている訳ではありません.**（提出しようとしても受け取りません.）参考問題の趣旨は，参考問題No. 1の冒頭に書いた通りです.

末尾に（数列に対する）**ボルツァノ・ワイエルストラスの定理の証明**を載せておきます.

多変数関数の微分

問題 3.1. 次の2変数関数 $f(x,y)$ について，極限値 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ が存在するかどうかを調べ，存在する場合はその極限値を求めよ.

(1) $f(x,y) = \dfrac{x^3y}{x^6+y^2}$　　(2) $f(x,y) = xy\log(x^2+y^2)$

(3) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$　　(4) $f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

問題 3.2. 次の関数 $f(x,y)$ が点 $(0,0)$ で偏微分可能であるかどうかを判定せよ.

(1) $f(x,y) = \sqrt{x^4+y^4}$　　(2) $f(x,y) = (x^4+y^4)^{\frac{1}{4}}$

問題 3.3. 次の2変数関数 $f(x,y)$ が点 $(0,0)$ で全微分可能であるかどうかを判定せよ.

(1) $f(x,y) = |xy|^{\frac{2}{3}}$　　(2) $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$

問題 3.4. $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $(r>0,\ 0\leq\theta<2\pi)$ とおく（極座標表示）. 以下を証明せよ.

(1) 2変数関数 $z = f(x,y)$ が $\mathbb{R}^2$ 上で C^1 級ならば，次の2つの等式が成り立つ.

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta, \qquad \frac{\partial z}{\partial \theta} = r\left(-\frac{\partial z}{\partial x}\sin\theta + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\theta\right).$$

(2) 2変数関数 $z = f(x,y)$ が $\mathbb{R}^2$ 上で C^2 級ならば，次の等式が成り立つ.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}$$

問題 3.5. 次の $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f(x,y)$ の極値を全て求めよ.（求めた極値が極大値・極小値のどちらであるのかを理由とともに述べること.）

(1) $f(x,y) = x^6+y^6$　　(2) $f(x,y) = x^3+y^3-3xy$

(3) $f(x,y) = (x^2+4y^2)e^{-x^2-y^2}$

解答例，コメント等

問題 3.4 は極座標変換に関する合成関数の偏微分（連鎖律）を直接用いる典型的な計算問題である.（少くとも一部は授業で扱う.）多くの微分積分の本で扱われている.

問題 3.1 の解答例

(1) $f(x,y) = \dfrac{x^3y}{x^6+y^2}$ とする．$x \neq 0$ の時，$f(x,0) = \frac{0}{x^6} = 0$ であり，一方，$f(x,x^3) = \frac{x^3x^3}{x^6+x^6} = \frac{1}{2}$ である．従って，極限値 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ は存在しない.

注意. (1) の解答を図形的な言葉で説明すると，直線 $y=0$（但し $x \neq 0$）上では常に $f(x,y)=0$ であり，一方，曲線 $y=x^3$（但し $x \neq 0$）上では常に $f(x,y)=\frac{1}{2}$ である．(x,y) の $(0,0)$ への近づき方によって $f(x,y)$ の値が異なる値に近づくので，極限値 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ は存在しないのである.

(2) $f(x,y) = xy\log(x^2+y^2)$ とする．$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, (r>0, 0 \le \theta < 2\pi)$ とすると，

$$|f(r\cos\theta, r\sin\theta)| = |r\cos\theta \cdot r\sin\theta \cdot \log r^2| \le 2|r^2\log r| \longrightarrow 0, \qquad (r \to +0)$$

である.（ここで，$a>0$ の時，$\displaystyle\lim_{t\to+0} t^a \log t = 0$ である事を用いた.）従って，極限値 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ が存在し，

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

(3) これは授業で扱った．$f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ とする．$x \neq 0$ の時，$f(x,0)=0$ であり，一方，$f(x,x) = \frac{1}{2}$ である．従って，極限値 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ は存在しない.

(4) これは授業で扱った．$f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ とする．$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $(r>0, 0 \le \theta < 2\pi)$ とすると，

$$|f(r\cos\theta, r\sin\theta)| = \left|\frac{r\cos\theta \cdot r\sin\theta}{r}\right| = r|\cos\theta\sin\theta| \le r \longrightarrow 0, \qquad (r \to +0)$$

である．従って，極限値 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ が存在し，

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

問題 3.2 の解答例

(1) $h \neq 0$ とすると

$$\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \frac{h^2-0}{h} = h \longrightarrow 0, \qquad (h \to 0)$$

なので，極限 $\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}$ が存在し，$f(x,y)$ は点 $(0,0)$ で x に関して偏微分可能である．同様に，$f(x,y)$ は点 $(0,0)$ で y に関して偏微分可能である．以上より，$f(x,y)$ は点 $(0,0)$ で偏微分可能である．

(2) $h \neq 0$ とすると

$$\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \frac{|h|-0}{h} = \begin{cases} 1, & h>0 \text{ の時}, \\ -1, & h<0 \text{ の時} \end{cases}$$

なので，極限 $\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}$ は存在しない．従って，$f(x,y)$ は点 $(0,0)$ で x に関して偏微分可能ではない．故に，$f(x,y)$ は点 $(0,0)$ で偏微分可能ではない．

問題 3.3 の解答例

(1) 答は，$f(x,y)=|xy|^{\frac{2}{3}}$ は点 $(0,0)$ で全微分可能である．その理由は以下の通りである．

$f(0,0)=0$ である．$h \neq 0$ の時，$\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \frac{0-0}{h} = 0$ なので，$f(x,y)$ は点 $(0,0)$ で x について偏微分可能で，$f_x(0,0)=0$ である．同様に，$f(x,y)$ は点 $(0,0)$ で y について偏微分可能で，$f_y(0,0)=0$ である事が分かる．

$$G(x,y) = \begin{cases} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{|xy|^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0) \text{ の時}, \\ 0, & (x,y)=(0,0) \text{ の時} \end{cases}$$

とする．すると，

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}\,G(x,y) = f(0,0)+f_x(0,0)x+f_y(0,0)y+\sqrt{x^2+y^2}\,G(x,y)$$

が成り立つ．又，$G(x,y)$ は点 $(0,0)$ で連続である．何故ならば，$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, $(r>0,\ 0\leq\theta<2\pi)$ とすると，

$$|G(r\cos\theta, r\sin\theta)| = \frac{r^{\frac{4}{3}}|\cos\theta\sin\theta|^{\frac{2}{3}}}{r} = r^{\frac{1}{3}}|\cos\theta\sin\theta|^{\frac{2}{3}} \leq r^{\frac{1}{3}} \longrightarrow 0, \qquad (r\to +0)$$

であるから，

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} G(x,y) = 0 = G(0,0)$$

で，$G(x,y)$ は点 $(0,0)$ で連続である事が分かる．以上より，$f(x,y)=|xy|^{\frac{2}{3}}$ は点 $(0,0)$ で全微分可能である．