問題 1.8. a を実数とする．$\lim_{x \to a} x^2 = a^2$ が成り立つ事を証明せよ．(関数の極限の定義を直接用いて（ε-δ 論法によって）確かめよ.)

問題 1.9. 開区間 I 上の関数 f が点 $a \in I$ で連続であり，$f(a) > 0$ であるとする．この時，或る $\delta > 0$ が存在して，$|x - a| < \delta$ を満たす任意の $x \in I$ に対して $f(x) > 0$ である事を証明せよ．

問題 1.10. $-1 \leq x \leq 1$ の時，$\cos(\sin^{-1} x) = \sqrt{1 - x^2}$ である事を証明せよ．

解答例，コメント等

問題 1.1, 1.4 は授業で扱った．**問題 1.6** は有名な事実の証明であるが，例えば，参考文献 [1] の 13 ページの「問題 1.1 の 3 (1)」に載っている．**問題 1.7** は，例えば，[1] の 13 ページの「問題 1.1 の 10」を参照せよ．

問題 1.2 の解答例

証明. $\varepsilon > 0$ を任意にとる．$\{a_n\}$ が α に収束するので，或る自然数 N_0 が存在して，

$$^{\forall}k > N_0, \quad |a_k - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{1.1}$$

が成り立つ．$n > N_0$ とすると，(1.1) より，

$$\begin{aligned}
|b_n - \alpha| &= \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k - \alpha\right| = \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\alpha\right| = \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n}(a_k - \alpha)\right| \\
&\leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|a_k - \alpha| = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_0}|a_k - \alpha| + \frac{1}{n}\sum_{k=N_0+1}^{n}|a_k - \alpha| \\
&< \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_0}|a_k - \alpha| + \frac{1}{n}\sum_{k=N_0+1}^{n}\frac{\varepsilon}{2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_0}|a_k - \alpha| + \frac{1}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2}(n - N_0) \\
&\leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_0}|a_k - \alpha| + \frac{\varepsilon}{2} \qquad (1.2)
\end{aligned}$$

が成り立つ．アルキメデスの原理より，

$$N > \frac{2}{\varepsilon}\sum_{k=1}^{N_0}|a_k - \alpha| \quad \left(\text{これは } \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N_0}|a_k - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ と同値}\right), \quad \text{かつ} \quad N > N_0$$

を満たす自然数 N が存在する．(1.2) より，$n \geq N$ を満たす任意の自然数 n に対して，

$$|b_n - \alpha| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_0}|a_k - \alpha| + \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N_0}|a_k - \alpha| + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

従って，$\{b_n\}$ は α に収束する． □

問題 1.3 の解答例

証明. (1) $r>1$ とする．実数 K を任意にとる．$r>1$ に注意して，$N>\frac{K}{r-1}$ となる自然数 N をとる．$n\in\mathbb{N}, n\geq N$ ならば，2 項定理より，

$$r^n=\{(r-1)+1\}^n=\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k(r-1)^k\geq n(r-1)\geq N(r-1)>K.$$

従って，$\lim_{n\to\infty} r^n=\infty$ である．

(2) $r=0$ の場合は自明である．$0<|r|<1$ とする．$\varepsilon>0$ を任意とする．$\frac{1}{|r|}>1$ なので，(1) より $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{|r|}\right)^n=\infty$ であるから，或る自然数 N が存在して，$n\geq N$ を満たす任意の自然数 n に対して

$$\left(\frac{1}{|r|}\right)^n>\frac{1}{\varepsilon}$$

が成り立つ．従って，$n\geq N$ を満たす任意の自然数 n に対して，$|r^n|<\varepsilon$ が成り立つ．故に，$\lim_{n\to\infty} r^n=0$ である． □

問題 1.5 の解答例

証明. (1) 帰納法によって証明する．先ず，$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ は 2 次方程式 $x^2-x-1=0$ の解のうち大きい方である事に注意する．$n=1$ の時は，$a_1=1$ なので成立する．$1\leq a_k<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ であると仮定する．$a_{k+1}=\sqrt{a_k+1}$ より，$\sqrt{2}\leq a_{k+1}<\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ である．従って，任意の自然数 n に対して $1\leq a_n<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ である．

(2) $\{a_n\}$ が有界な増加列である事を証明する．$1\leq a_n<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ なので，

$$a_{n+1}-a_n=\sqrt{a_n+1}-a_n=\frac{a_n+1-a_n^2}{\sqrt{a_n+1}+a_n}=\frac{(a_n-\frac{1-\sqrt{5}}{2})(\frac{1+\sqrt{5}}{2}-a_n)}{\sqrt{a_n+1}+a_n}>0$$

である．従って，$\{a_n\}$ は増加列である．(1) より $\{a_n\}$ は有界列であるから，$\{a_n\}$ は有界な増加列である．従って，$\{a_n\}$ は収束する．

α を $\{a_n\}$ の極限値とする．漸化式で $n\to\infty$ とすると，$\alpha=\sqrt{\alpha+1}$ が成り立つ．従って，$\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. □

問題 1.8 の解答例

証明. $\varepsilon>0$ を任意とする．$\delta=\min\{1,\frac{\varepsilon}{1+2|a|}\}$ とする．$0<|x-a|<\delta$ ならば，

$$\begin{aligned}|x^2-a^2|=&|x+a|\,|x-a|=|(x-a)+2a|\,|x-a|\leq(|x-a|+2|a|)|x-a|\\&<(\delta+2|a|)\delta\leq(1+2|a|)\delta\leq(1+2|a|)\cdot\frac{\varepsilon}{1+2|a|}=\varepsilon.\end{aligned}$$

従って，$\lim_{x\to a}x^2=a^2$. □

問題 1.9 の解答例

証明. $f(a) > 0$ なので，$f(x)$ が $x = a$ で連続である事から，或る $\delta > 0$ が存在して，$|x - a| < \delta$ ならば

$$|f(x) - f(a)| < \frac{f(a)}{2}$$

が成り立つ．(関数の極限の定義で $\varepsilon = \frac{f(a)}{2} > 0$ とした.) 従って，$|x - a| < \delta$ ならば,

$$f(x) > f(a) - \frac{f(a)}{2} = \frac{f(a)}{2} > 0.$$

□

問題 1.10 の解答例

証明. $-1 \leq x \leq 1$ とする．$\theta = \sin^{-1} x$ とおく．この時，$x = \sin\theta$ かつ $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ である．$\cos\theta \geq 0$ に注意すると,

$$\cos(\sin^{-1} x) = \cos\theta = \sqrt{1 - \sin^2\theta} = \sqrt{1 - x^2}.$$

□

参考文献

[1] 難波誠,「微分積分学」(数学シリーズ), 裳華房.

極限 (ε-N 論法，ε-δ 論法)，論理，命題 (否定命題等) について，これらに対象を絞って比較的丁寧に解説している図書として，例えば,

- 田島一郎,「イプシロン-デルタ」(数学ワンポイント双書 20), 共立出版.

を挙げておきます.