数学IA（理I 10–15），（夏学期），　参考問題 No. 1

（2010 年 4 月 28 日）

参考の為，概ね各章ごとに「参考問題」を配布するので，役立ててほしい.（講義では時間の制約で演習問題的なものはそれ程多く扱えないので.）又，講義で扱う「一部の定理の証明」や「例」は，この授業を理解する為の演習問題的なものに相当するので，復習おいてほしい.

注意.
- この参考問題は，学習の参考に提供しているだけで，**レポートの提出等を求めている訳ではありません**.（提出しようとしても受け取りません.）
- 一部の問題には，解答例（略解の場合もある）を末尾に載せる事があります．しかし，全ての問題に対して解答例を提供する訳ではありません．授業で扱ったものは，解答例は載せません．又，有名な問題等では，同じ問題が扱われている本と掲載箇所を挙げて，各自で調べて学習する様に促す事もあります．独力で解けない問題は，授業のノートや参考書等で調べたり，周囲の人に質問したり，周囲の人と一緒に取り組む等して，能動的に学習する事が望まれます.
- 配布物には誤植等のミスは無いに越した事はありませんが，実際問題として少々のミスが混入するのを防ぐ事は困難です．この点を承知の上で利用して下さい.

極限と連続性

問題 1.1. $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$ が成り立つ事を証明せよ.（数列の極限の定義を直接用いて（ε-N 論法によって）確かめよ.）

問題 1.2. 数列 $\{a_n\}$ が α に収束するとする．数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}$$

によって定める．この時，$\{b_n\}$ は α に収束する事を証明せよ.（この問題は ε-N 論法の有名な問題で，多くの本で取り上げられている．例えば，参考文献 [1] の 13 ページの「問題 1.1 の 6」.）

問題 1.3. (1) $r > 1$ の時，$\lim_{n\to\infty} r^n = \infty$ である事を証明せよ．(数列の ∞ への発散の定義を直接用いて確かめよ.)

(2) $-1 < r < 1$ の時，$\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ である事を証明せよ．(注：(1) と無関係に数列の極限の定義のみを考えて直接証明する事もできるが，$0 < |r| < 1$ の場合は数列 $\{(\frac{1}{|r|})^n\}$ に対して (1) の主張を参考にする事が出来る.)

問題 1.4. 数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ について，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha, \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = \beta$$

であるとする．この時，数列の極限の定義を直接用いて (ε-N 論法によって)，以下が成り立つ事を証明せよ．

(1) $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \alpha + \beta$

(2) c を定数とする時，$\lim_{n\to\infty} ca_n = c\alpha$

(3) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta$

問題 1.5. 数列 $\{a_n\}$ を次の漸化式によって定める:

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = \sqrt{a_n + 1}.$$

(1) 任意の自然数 n に対して，

$$1 \leq a_n < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

が成り立つ事を証明せよ．

(2) 数列 $\{a_n\}$ が収束する事を証明し，$\{a_n\}$ の極限値を求めよ．

問題 1.6. 任意の $a > 0$ に対して，次が成り立つ事を証明せよ．

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$$

(これは有名な事実でしばしば用いられるので，覚えておくこと.)

問題 1.7. 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

によって定めると，$\{a_n\}$ は ∞ に発散する事を証明せよ．

(ヒント: $\{a_n\}$ が収束しない事は，$\{a_n\}$ がコーシー列でない事を証明すればよいのだが，その為には，例えば，数列 $\{a_{2n} - a_n\}$ が 0 に収束しない事を示せばよい.)