2006年夏学期数学IB期末試験 解答例

[1] 略

[2] $f(x,y)=x^2+x^3+y^2$

$f_x=2x+3x^2$, $f_y=2y$

$f_x=f_y=0$ は $(x,y)=(0,0),(-\frac{2}{3},0)$

この2点が極値を与える候補.

$f_{xx}=2+6x$, $f_{xy}=0$, $f_{yy}=2$ より

ヘッセ行列 $H_f=\begin{pmatrix}2+6x & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$

$\det H_f(0,0)=4>0$ $f_{xx}(0,0)=2>0$

よって $f(x,y)$ は $(0,0)$ で極小値 $f(0,0)=0$ をとる.

$\det H_f(-\frac{2}{3},0)=-4<0$ より鞍点.

以上より $(0,0)$ で極小値 0

(極大値はない)

[3] $G(x,y)=x^2+4y^2-1$ とする.

まず特異点について

$G_x=2x$, $G_y=8y$ $G_x=G_y=0$ は $(x,y)=(0,0)$

ただし $(0,0)$ は $x^2+4y^2=1$ 上にはないので特異点なし.

続いて $F(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda G(x,y)$ とする

$F_x=1-2x\lambda$, $F_y=4-8y\lambda$

$$\begin{cases}F_x(a,b,\lambda)=1-2a\lambda=0 & \cdots ①\\ F_y(a,b,\lambda)=4-8b\lambda=0 & \cdots ②\\ G(a,b)=a^2+4b^2-1=0 & \cdots ③\end{cases}$$ をみたす (a,b) を求める.

① より $a=\frac{1}{2\lambda}$ ② より $b=\frac{1}{2\lambda}$

③に代入 $\frac{1}{4\lambda^2}+\frac{1}{\lambda^2}-1=0$ より $\lambda^2=\frac{5}{4}$

$\lambda=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$ より $(a,b)=(\pm\frac{1}{\sqrt{5}},\pm\frac{1}{\sqrt{5}})$ (複号同順)

$f(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}})=\sqrt{5}$

$f(-\frac{1}{\sqrt{5}},-\frac{1}{\sqrt{5}})=-\sqrt{5}$

したがって $f(x,y)$ は

$(x,y)=(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}})$ で最大値 $\sqrt{5}$

$(x,y)=(-\frac{1}{\sqrt{5}},-\frac{1}{\sqrt{5}})$ で最小値 $-\sqrt{5}$ をとる.

[4] $x=s+t,\ y=s-t$ より $s=\dfrac{x+y}{2}$, $t=\dfrac{x-y}{2}$, $\dfrac{\partial s}{\partial x}=\dfrac{1}{2}, \dfrac{\partial s}{\partial y}=\dfrac{1}{2}, \dfrac{\partial t}{\partial x}=\dfrac{1}{2}, \dfrac{\partial t}{\partial y}=-\dfrac{1}{2}$ …(*)

連鎖律を使うと $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial s}\cdot\dfrac{\partial s}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial t}\cdot\dfrac{\partial t}{\partial x}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial s}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial t}$ ∵(*)より

$\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{\partial f}{\partial s}\cdot\dfrac{\partial s}{\partial y}+\dfrac{\partial f}{\partial t}\cdot\dfrac{\partial t}{\partial y}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial s}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial t}$ ∵(*)より

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)\cdot\frac{\partial s}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)\cdot\frac{\partial t}{\partial x}\right\}+\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)\cdot\frac{\partial s}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)\cdot\frac{\partial t}{\partial x}\right\}=\frac{1}{4}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial s\partial t}+\frac{1}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)\cdot\frac{\partial s}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)\cdot\frac{\partial t}{\partial y}\right\}-\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)\cdot\frac{\partial s}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)\cdot\frac{\partial t}{\partial y}\right\}=\frac{1}{4}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial s\partial t}+\frac{1}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

よって. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial s\partial t}=\underline{\underline{\dfrac{\partial^2 g}{\partial s\partial t}}}$ （∵ $f(x,y)=g(s,t)$ より）

[5] $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$

(1) $y=e^x$, $y=e^{-x}$ は $\mathbb{R}$ で連続であるから $f(x)$ も $\mathbb{R}$ で連続

また $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ であるので $f(x)$ の値域は $\mathbb{R}$（すなわち全射）

よって逆関数 $f^{-1}(x)$ をもつならその定義域は $\mathbb{R}$

$\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ において $f(\alpha)=f(\beta)$ とする.

$$\frac{e^\alpha-e^{-\alpha}}{2}=\frac{e^\beta-e^{-\beta}}{2}$$

$(e^\alpha-e^\beta)-(e^{-\alpha}-e^{-\beta})=0$ これが成り立つのは $\alpha=\beta$ のときのみ

よって $f(x)$ は単射である.

したがって $f(x)$ は全単射であるから逆関数 $f^{-1}(x)$ をもつ.

以上より $f(x)$ は $\mathbb{R}$ を定義域とする逆関数 $f^{-1}(x)$ をもつ$_{//}$

(2) $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ とする. 両辺を $2e^x$ 倍して整理すると.

$e^{2x}-2ye^x-1=0$

$e^x=y\pm\sqrt{y^2+1}$

$e^x>0$ より $e^x=y+\sqrt{y^2+1}$

$x=\log(y+\sqrt{y^2+1})$

よって $f^{-1}(x)=\log(x+\sqrt{x^2+1})$

$$f^{-1\prime}(x)=\frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}}$$