演習問題・解答

1. エースが 1 枚，2 枚，3 枚，4 枚出る確率を求めて，それぞれに対応した枚数をかけてやると次の式で表されます.

$$1 \times_{13} C_1 \times \frac{4}{52} \times \frac{48}{51} \times \frac{47}{50} \times \cdots\cdots\cdots \times \frac{37}{40}$$

$$2 \times_{13} C_2 \times \frac{4}{52} \times \frac{3}{51} \times \frac{48}{50} \times \cdots\cdots\cdots \times \frac{38}{40}$$

$$3 \times_{13} C_3 \times \frac{4}{52} \times \frac{3}{51} \times \frac{2}{50} \times \frac{48}{49} \times \cdots\cdots \times \frac{38}{40}$$

$$4 \times_{13} C_3 \times \frac{4}{52} \times \frac{3}{51} \times \frac{2}{50} \times \frac{1}{49} \times \frac{48}{48} \times \cdots \times \frac{38}{40}$$

答えはこの 4 つの式の和です.
（エースが 0 枚のときは 0 をかけるので，無視します.）

約分できる箇所がいくつもあることに気づけば，電卓でできる範囲の計算に収まります.
地道に計算していくと，”1” という答えになるはずです.

答え．1

2. まず事象を定めることから始めます.
ある製品について，それが A 工場で生産されたものである，という確率を $P(A)$.
B 工場，C 工場，D 工場についても同様に $P(B)$，$P(C)$，$P(D)$ とおきます.
問題文より，$P(A) = 3/15,\ P(B) = 3/15,\ P(C) = 4/15,\ P(D) = 5/15$ です.

次に，その製品が不良品である，という事象を ”E” とおくと各工場における不良品の割合は次にように表されます.
$P(E|A) = 3/100,\ P(E|B) = 4/100,\ P(E|C) = 3/100,\ P(E|D) = 7/100$
求めたいのは $P(A|E)$，$P(B|E)$，$P(C|E)$，$P(D|E)$ です.
ここでベイズの定理を思い出してみましょう.

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{\sum P(H_j)P(A|H_j)}$$

これを用いると

$$P(A|E) = \frac{P(A)P(H|A)}{P(A)P(H|A) + P(B)P(H|B) + P(C)P(H|C) + P(D)P(H|D)}$$

$$= \frac{(3/15) \times (3/100)}{(3/15) \times (3/100) + (3/15) \times (4/100) + (4/15) \times (3/100) + (5/15) \times (7/100)}$$

$$= 9/68$$

となります．同様にして，
$P(B|E) = 12/68,\ P(C|E) = 12/68,\ P(D|E) = 35/68$

答え． 9/68，12/68，12/68，35/68

3.
期待値と分散の演算の性質をここで見直しておこう．

期待値 E の演算の性質
X と Y を確率変数として，次が成り立つ．
(i) $E(c) = c$
(ii) $E(X + c) = E(X) + c$
(iii) $E(cX) = cE(X)$
(iv) $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

分散 V の演算の性質
(i) $V(c) = 0$
(ii) $V(X + c) = V(X)$
(iii) $V(cX) = c^2 V(X)$
X と Y が独立のときには
(iv) $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$

さらに次の変形も重要である．
$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

これらを踏まえた上で計算すると以下の通りである．

(1) $E(2X - 3) = 2E(X) - 3 = 2 \cdot (-3) - 3 = -6 - 3 = -9$
$V(-X + 2) = V(-X) = (-1)^2 \cdot V(X) = V(X) = 25$
$E(X^2) = V(X) + (E(X))^2 = 25 + (-3)^2 = 25 + 9 = 34$
$E(-2X^2) = -2E(X^2) = (-2) \cdot 34 = -68$

(2) $E(X-Y)=E(X)-E(Y)=-3-(-4)=1$
$V(X-Y)=V(X)+V(-Y)=V(X)+(-1)^2V(Y)=V(X)+V(Y)=25+16=41$
$E(3X-2Y+1)=3E(X)-2E(Y)+1=3\cdot(-3)-2\cdot(-4)+1=-9+8+1=0$
$V(3X-2Y+1)=3^2\cdot V(X)+(-2)^2V(Y)=9V(X)+4V(Y)=9\cdot 25+4\cdot 16=289$

(3) $E(XY)=E(X)E(Y)=(-3)\cdot(-4)=12$
$E(X^2Y^2)=E(X^2)E(Y^2)=34\cdot 32=1088$
$E(-2XY+6)=-2E(XY)+6=(-2)\cdot 12+6=-24+6-18$

4.
チェビシェフの不等式
確率変数 X の分散 $V(X)$ が存在するならば，実数 a に対して次が成り立つ．
$P(|X-E(X)|\geq a)\leq \dfrac{V(X)}{a^2}$

問題の確率分布の分散を計算して，上の不等式に代入し，照らし合わせればよい．

5. 1 つ目の不等式について．連続型として，X の p.d.f を f とおく．定義より，

$m_X(t)=E(e^{tX})=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}f(x)dx$

$P(X\geq a)=\displaystyle\int_{a}^{\infty} f(x)dx$
である．

$\displaystyle\int_{a}^{\infty} f(x)dx\leq e^{-at}\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}f(x)dx$ を示す．

$e^{-at}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}f(x)dx\geq e^{-at}\int_{a}^{\infty} e^{tx}f(x)dx=\int_{a}^{\infty} e^{t(x-a)}f(x)dx$

ところで，$0<t$, $x\geqq a$ より　$t(x-a)\geqq 0$
$\therefore\quad e^{t(x-a)}\geq 1$

$\therefore\quad \displaystyle\int_{a}^{\infty} e^{t(x-a)}f(x)dx\geq\int_{a}^{\infty} f(x)dx$

以上より，目的の不等式が示された．２つ目の不等式も同様に示せる．

6. ${}_8C_4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{35}{128}$

<u>答え．35/128</u>

7. 母数 λ のポアソン分布の p.d.f は　$f(x) = \dfrac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \qquad (x \geq 0)$

平均が 2 なので $\lambda = 2$ のポアソン分布 $f(x) = \dfrac{2^x e^{-2}}{x!}$ を考える．

（収入の期待値）
$= 0 \times 7000 \times +1 \times 7000 \times f(1) + 2 \times 7000 \times f(2) + 3 \times 7000 \times f(3)$
$= 0 + 7000 \times (2/e^2) + 14000 \times (2/e^2) + (4/3e^2) \times 21000$
$= (1/e^2) \times 70000 \quad 9475$

（支出の期待値）
$= 8000 \times 1 = 8000$

よって営業所の 1 日の利益額の期待値は
$9475 - 8000 = 1475$（円）

<u>答え．1475 円</u>

8. ある条件下では二項分布が正規分布で近似できることを利用する．
問題の確率変数は二項分布 $B(21600,\ 1/25)$ に従う．
$np = 864$
$npq = 864 \times \dfrac{24}{25} \qquad (q = 1 - p)$

よって正規分布 $N(864,\ 864 \times (24/25))$ で近似できる．

（イ）$P(x \geqq 900)$ の確率を求める．
先の正規分布を標準変換すると以下の通り．

$$\frac{(900 - 0.5) - 864}{\sqrt{864 \times \frac{24}{25}}} = \frac{35.5 \times 5}{144} \quad 1.23$$

標準正規分布の上側確率表を参照すると，1.23 に対応する数値は 0.1093 である．
これが答えである．

<u>答え．0.1093</u>

（ロ）求める数値を a とおく．
先と同様に考えると，a に関する方程式が導ける．

$$\frac{(a-0.5)-864}{\sqrt{864\times\frac{24}{25}}}=2.33$$

これを解くと，$a=931.604 \quad 932$

<u>**答え．** $a=932$</u>

9. 正規分布 $N(\mu,\sigma^2)$ の p.d.f は次で表される．

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$$

積率母関数の定義に従って計算する．

$$\phi_X(t)=E(e^{tX})=\int_{-\infty}^{\infty}e^{tx}\ \cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}e^{tx-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x^2-2\mu')}dx \qquad \cdots(1)$$

ただし，$\left(\mu'=\mu+\sigma^2t\right)$

インテグラル以下は次のように変形できる．

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x^2-2\mu')}dx=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x^2-2\mu'+\mu'^2-\mu'^2)}dx$$

$$=e^{\frac{\mu'^2}{2\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu')^2}dx=e^{\frac{\mu'^2}{2\sigma^2}}\cdot\sqrt{2\pi}\sigma$$

したがって，

$$(1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}}\cdot e^{\frac{\mu'^2}{2\sigma^2}}\cdot\sqrt{2\pi}\sigma$$

$$=e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\mu^2-\mu'^2)}$$

$$=e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left\{\mu^2-(\mu^2+2\mu\sigma^2t+\sigma^4t^2)\right\}}$$

$= e^{\frac{1}{2\sigma^2}(2\mu\sigma^2 t+\sigma^4 t^2)}$

$= e^{(\frac{1}{2}\sigma^2 t^2+\mu t)}$

これが正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ の積率母関数である.

答え． $\phi_X(t) = e^{(\frac{1}{2}\sigma^2 t^2+\mu t)}$

この積率母関数 $\phi_X(t)$ から期待値 $E(X)$ と分散 $V(X)$ を求める.

$\phi'_X(t) = (\sigma^2 t+\mu)e^{(\frac{1}{2}\sigma^2 t^2+\mu t)} = (\sigma^2 t+\mu)\phi_X(t)$
$\phi''_X(t) = \sigma^2\phi_X(t) + (\sigma^2 t+\mu)\phi'_X(t)$

$E(X) = \phi'_X(0) = \mu$
$E(X^2) = \phi''_X(0) = \sigma^2+\mu^2$
$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \sigma^2+\mu^2-\mu^2 = \sigma^2$

以上より,
$E(X) = \mu,\ V(X) = \sigma^2$

10. (1) $c = 1/2$
(2) $f_1(x) = \dfrac{1}{2}x^2 e^{-x},\quad f_2(y) = \dfrac{3}{(1+y)^4}$
(3) $E(X) = 3,\ V(X) = 3,\ E(Y) = 1/2,\ V(Y) = 3/4$

11. $P(X=0) = 1/8,\ P(Y=1) = 1/4,\ P(X=0,\ Y=1) = 1/8 \neq 1/32$ だから独立でない.
XY の確率分布を作れば $E(XY) = 21/8$. 一方, $E(X) = 3/2,\ E(Y) = 7/4,\ E(XY) = E(X)\cdot E(Y)$ だから, $Cov(X,\ Y) = 0$.

12. 秤量を $X_A,\ X_B$ とすると,（I）では $V(X_A) = V(X=B) = \sigma^2$ である.（II）では, 和を Y, 差を Z として, $(Y+Z)/2,\ (Y-Z)/2$ が $m_A,\ m_B$ の推定量となるが, これらの分散はともに $\sigma^2/2$. よって（II）が優れている.

13.

$$\sum_{r=0}^{n} P(X=r)(Y=n-r) = \sum_{r=0}^{n} \left(\frac{e^{-\lambda}\lambda^r}{r!}\right)\left(\frac{e^{-\mu}\mu^{n-r}}{(n-r)!}\right) = e^{-(\lambda+\mu)} \sum_{r=0}^{n} \left(\frac{n!}{r!(n-r)!}\right)\left(\frac{\lambda^r\mu^{n-r}}{n!}\right) \qquad \cdots(1)$$

(1) の $\sum$ 以下の部分を計算する．

二項定理　$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r a^{n-r} b^r$

により，

$$\sum_{r=0}^{n} \left(\frac{n!}{r!(n-r)!}\right)\left(\frac{\lambda^r\mu^{n-r}}{n!}\right) \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r \lambda^r \mu^{n-r} \cdot \left(\frac{1}{n!}\right) = (\lambda+\mu)^n \cdot \left(\frac{1}{n!}\right)$$

$$\therefore\ (1) = e^{-(\lambda+\mu)} \cdot (\lambda+\mu)^n \cdot \left(\frac{1}{n!}\right) = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}(\lambda+\mu)^n}{n!}$$

ところで，

$$P(X+Y=n) = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}(\lambda+\mu)^n}{n!}$$

これは母数 $\lambda+\mu$ のポアソン分布に従う．

したがって，$P(X+Y=n) = \sum_{r=0}^{n} P(X=r)P(Y=n-r)$

14. 正規分布の標準化を用いる．

X を平均μ，分散σ^2 の正規分布に従う確率変数とする．このとき，

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

と表される確率変数 Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う．

$X=150$ として標準化を施す．

$$Z_1 = \frac{150-100}{15} = 3.33...$$

$$P(Z \geq Z_1) = 0.5 - P(0 \leq Z \leq 3.33) = 0.5 - 0.4996 = 0.0004$$

よって答えは **0.04 %**

15.

母平均, 母分散が μ, σ^2 とする．標本を X_i $(i=1,\cdots,n)$ とすれば標本平均は $\overline{X_n}=\frac{1}{n}\sum X_i$ である．まず

$$z_n=\frac{\overline{X_n}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

という量を考えると

$$\begin{aligned}
z_n &= \sqrt{n}\,\frac{1}{n}\,\frac{\sum X_i-n\mu}{\sigma}\\
&= \frac{1}{\sqrt{n}}\,\frac{X_1+\cdots+X_n-n\mu}{\sigma}\\
&= \frac{1}{\sqrt{n}}\left[\frac{X_1-\mu}{\sigma}+\cdots+\frac{X_n-\mu}{\sigma}\right]\\
&\equiv \sum W_i
\end{aligned}$$

ここで W_i のモーメント母関数は, $E[W_i]=0, E[W_i^2]=\frac{1}{n}$ であることに注意して

$$\begin{aligned}
M_{W_i}(\theta) &= 1+\frac{1}{1!}\,E[W_i]\,\theta+\frac{1}{2!}\,E[W_i^2]\,\theta^2+\cdots\\
&= 1+\frac{1}{2n}\,\theta^2+\cdots
\end{aligned}$$

W_i は互いに独立なので

$$\begin{aligned}
M_{z_n}(\theta) &= E[e^{z_n\theta}]\\
&= E[e^{W_1\theta}\cdots e^{W_n\theta}]\\
&= E[e^{W_1\theta}]\cdots E[e^{W_n\theta}]\\
&= \left(1+\frac{1}{2n}\,\theta^2+\cdots\right)^n\\
&\simeq \left(1+\frac{1}{2n}\,\theta^2\right)^n
\end{aligned}$$

ここで n が十分大きい時 θ の 3 次以上の項は無視できるとした．$n\to\infty$ を考えれば

$$\lim_{n\to\infty}M_{z_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\theta^2/2}{n}\right)^n=e^{\frac{1}{2}\theta^2}$$

これは標準正規分布ののモーメント母関数に一致する．

16. $E(\overline{X_n})=E\left(\dfrac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}\right)=\dfrac{1}{n}E(X_1+X_2+\cdots+X_n)$

$=\dfrac{1}{n}\{E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_n)\}=\dfrac{1}{n}\cdot n\mu=\mu$

$V(\overline{X_n})=V\left(\dfrac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}\right)=\dfrac{1}{n^2}V(X_1+X_2+\cdots+X_n)$

$=\dfrac{1}{n^2}\{V(X_1)+V(X_2)+\cdots+V(X_n)\}=\dfrac{1}{n^2}\cdot n\sigma^2=\dfrac{\sigma^2}{n}$

また,

$$\frac{nS_n{}^2}{\sigma^2} = \frac{n}{\sigma^2}\cdot\frac{1}{n}\{(X_1-\overline{X_n})^2+(X_2-\overline{X_n})^2+\cdots+(X_n-\overline{X_n})^2\}$$

$$= \left(\frac{X_1-\overline{X_n}}{\sigma}\right)^2+\left(\frac{X_2-\overline{X_n}}{\sigma}\right)^2+\cdots+\left(\frac{X_n-\overline{X_n}}{\sigma}\right)^2$$

したがって, $\dfrac{nS_n{}^2}{\sigma^2}$ は自由度 $n-1$ のカイ二乗分布に従う.
自由度 n のカイ二乗分布に従う確率変数の期待値は n, 分散は $2n$ であることから,

$$E(\frac{nS_n{}^2}{\sigma^2}) = n-1$$

$$\frac{n}{\sigma^2}\cdot E(S_n{}^2) = n-1$$

$$\therefore\ E(S_n{}^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2$$

$$V(\frac{nS_n{}^2}{\sigma^2}) = 2(n-1)$$

$$\frac{n^2}{\sigma^4}\cdot V(S_n{}^2) = 2(n-1)$$

$$\therefore\ V(S_n{}^2) = \frac{2(n-1)}{n^2}\sigma^4$$

17. $Z_1, Z_2, \cdots, Z_n$ が標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う独立な確率変数であるとき, それらの二乗和
$Y = Z_1{}^2+Z_2{}^2+\cdots+Z_n{}^2$ が従う分布のことを自由度 n のカイ二乗分布といい, 記号 χ_n^2 で表す.
その p.d.f, 期待値, 分散, 及び積率母関数は以下の通り.

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\cdot 2^{\frac{n}{2}}}\,x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}} \qquad (0<x<\infty)$$
$$E(X)=n,\ V(X)=2n$$
$$M_X(t) = (1-2t)^{-\frac{n}{2}}$$

※なお、上で現れた $\Gamma(n/2)$ はガンマ関数と呼ばれるもので, 次のように定義される.

$$\Gamma(y) = \int_0^\infty x^{y-1}e^{-x}dx$$

18. S_n を二項分布 $B(n,p)$ に従う確率変数とする.
$P(S_n=r) = {}_nC_r\,p^r\,(1-p)^{n-r}$ を p の関数と考えてこれを最大にする p の値を r で表せばよい.
すると $p=r/n$ となる.

19. 中心極限定理による正規近似を用いる.
$\hat{\lambda}=4.8,\ Z_{0.005}=2.576$ から，$[3.02,\ 6.58]$.

20. ２つの正規母集団の平均の差の区間推定
（標本の大きさ n が十分大きく，分散 σ が既知のとき）

$$[\,\overline{Y}-\overline{X}-Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{{\sigma_1}^2}{n}+\frac{{\sigma_2}^2}{m}},\quad \overline{Y}-\overline{X}+Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{{\sigma_1}^2}{n}+\frac{{\sigma_2}^2}{m}}\,]$$

上の式に
$\overline{X}=620, \overline{Y}=700, \sigma_1=110, \sigma_2=90,\ n=200,\ m=180$
を代入すると，$[-100.13,\ -59.87]$.

21. 母平均の検定（母分散が既知 の場合）である.
帰無仮説　H_0 ：　$\mu=185.0$
対立仮説　H_1 ：　$\mu\neq 185.0$　（両側検定）

標本の大きさ　$n=25$
標本平均　$\overline{X}=184.1$
母標準偏差　$\sigma=1.2$
比較する値　$\mu_0=185.0$

検定統計量 Z_0 を求める.

$$z_0=\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}=\frac{184.1-185.0}{1.2/\sqrt{25}}=-3.75$$

有意水準 5 %の両側検定だから
$z_0=-3.75<-1.96$
となり，z_0 は棄却域に入る.
したがって帰無仮説 H_0 は棄却され，対立仮説 H_1 が採択される.

結論として，本日のクリームパンの製造工程に異常があったと言える.

22. 母平均の検定（母分散が未知）の場合である．
帰無仮説　H_0：　$\mu = 65$
対立仮説　H_1：　$\mu < 65$　（左片側検定）

標本の大きさ　$n = 30$
標本平均　$\overline{X} = 63.5$
母標準偏差　$s = 12.0$
比較する値　$\mu_0 = 65$

検定統計量を求める．
$$z_0 = \frac{\overline{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{63.5 - 65.0}{12.0/\sqrt{30}} = -4.11$$

有意水準 1 %の左片側検定だから
$$z_0 = -4.11 < -2.326$$
となり，z_0 は棄却域に入る．したがって帰無仮説 H_0 は棄却され，対立仮説 H_1 が採択される．

結論として，お菓子の内容量は 65g より少ないと言える．

23. 母比率の検定である．
帰無仮説　H_0：　$p = 0.18$
対立仮説　H_1：　$p > 0.18$　（右片側検定）

標本の大きさ　$n = 4100$
標本比率　$\hat{p} = 820/4100$
比較する比率　$p_0 = 0.18$

検定統計量を求める．

$$z_0 = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} = \frac{0.20 - 0.18}{\sqrt{0.18(1-0.18)/4100}} = \frac{10}{3} = 3.33$$

有意水準 5 %の両側検定だから
$$z_0 = 3.33 > 1.645$$
となり，z_0 は棄却域に入る．したがって帰無仮説 H_0は棄却され，対立仮説 H_1 が採択される．

結論として，この商品の知名度は従来の 18 %より高まったと言える．

24. 母平均の差の検定である．

帰無仮説　H_0：　$\mu_1=\mu_2$ （カロリー摂取量は等しい）

対立仮説　H_1：　$\mu_1 \neq \mu_2$　（自宅生の方が多い）

　標本の大きさ　$n_1=400,\ n_2=400$

　標本平均　$\overline{X_1}=1824, \overline{X_2}=1815$

　母標準偏差　$s_1=54,\ s_2=72$

検定統計量を求める．

$$z_0=\frac{\overline{X_1}-\overline{X_2}}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}}=\frac{1824-1815}{\sqrt{\frac{54^2}{400}+\frac{72^2}{400}}}=2.0$$

有意水準１％の右片側検定だから

$z_0=2.0<2.326$

となり，z_0 は採択域に入る．したがって帰無仮説 H_0 は採択される．

結論として，女子大生に関して自宅生は自宅外生より，１日の摂取カロリー量が多いとは言えない．