

代数学 (テスト対策用)

黒田翔太

集合と論理に関しては各自で。ここには主な流れとして群論の基本事項を述べていく。つまり目次のような物。内容に全く言及していないが、各自で埋められたし (確認テスト)。また、空集合に対する考察はできるだけ深く深く掘り下げることがをオススメする。

def. 二項演算;

集合 A に対して写像 $A \times A \rightarrow A$ を二項演算と呼ぶことがある。

写像に関する考察:

1. 集合 A に対してその二項演算全体とは何か?
2. その集合における相当関係とは写像の相当関係であるわけだが、写像の相当関係の定義を述べよ。

def. 単位元

def. 半群, モノイド

問: 空集合は半群か?

def. 逆元

def. 群

問 1: n 個の元の積に関する結合律を証明せよ。

問 2: 逆元の一意性 単位元の一意性を示せ。

def. 対称群

集合 X に対して

$$S^X := \{f \in X^X \mid f: \text{全単射}\}$$

と定義するとこれは写像の合成を演算として群を成す。この群を特別に対称群と呼ぶ。また $\sharp X = n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ となる n が存在するとき、 n 次対称群と呼ぶ。

問: 実際に一般の対称群が群であることを確かめよ。また空集合ではどうなっているか考えよ。

部分群

ある群に対してその部分集合がその群の演算によって群をなしたとき、それを部分群という。

Prop. 部分群になる必要十分条件

$$H \leq G \Leftrightarrow [a, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H] \text{ かつ } [H \neq \emptyset]$$

問: これを示せ。

def. 群 G の冪集合上の自然な演算の定義

問: G を群とする。この時、 A, B, C, D をその部分集合として、 $A \subseteq B$ かつ $C \subseteq D$ であったとする。この時、以下を示せ。

$$A^{-1} \subseteq B^{-1}$$

$$AC \subseteq BD$$

これによって先程やった Prop の書き換えを行う．証明は Exercise としておく．
 G を群とし, H を空でない部分集合として,

$$[H \leq G] \Leftrightarrow [HH, H^{-1} \subseteq H] \Leftrightarrow [HH^{-1} \subseteq H]$$