科目名	数理統計学	対 象	2S-A,B	学 部研究科	理学部第一部	学 科 専攻科	数学	料	学籍番号		評点
平成	22年7月23日(	,	3 回目 ~ 時限目)	担当	金子 宏	学 年		氏名			
試験時間	60 <sub>9</sub>	注 意事 項	① 筆記用具以 2. 下記のみ参								)

- 2 二項分布 B(n,p) に従う確率変数 X がある. 確率変数  $2^X$  の平均と分散を求めよ.
- | 3 表が出る確率が p の硬貨を投げ続けて、初めて表が出たら投げるのをやめ、表が出た回も含めて投げた回数を X とおく、1 投目に表が出たか 裏が出たかによってそれぞれ、1,0 の値をもつように Y の値を定める。 つまり、1 投目表が出た場合、Y の値を 1 と定め、裏が出た場合、Y の値を 0 と定める。 確率変数 X,Y の共分散  $\mathrm{Cov}(X,Y)$  を求めよ。 また、 確率変数 X,Y が独立か否かを判定せよ。 ただし、 0 とする。
- $| \ 4 \ |$  さいころを 50 回投げて 6 の目が出た回数  $S_{60}$  について, 確率  $P(7 \le S_{60} \le 11)$  を計算せよ.
- ・確率変数 X が二項分布 B(n,p) に従うとは、

$$P(X = k) = {}_{n}C_{k}p^{k}(1-p)^{n-k} (k = 0, 1, \dots, n)$$

が満たされていることである. ただし, n は自然数であり, p は 0 を満たす実数である.

科目名	数理統計学	対 象	2S-A,B	学 部研究科	理学部第一部	学 科 専攻科	数学	料	学籍番号		評点
平成	21年7月31日(	,	2 回目 ~ 時限目)	担当	金子 宏	学年		氏名			
試験時間	60 s	注意事項	①. 筆記用具以 <del>2. 下記のみ参</del>	人外持込不 分照 持込	<u>ज</u>						)

- $oxed{1}$  ある病気の検査法が発見されたので、臨床試験を行ってみたところ、この病気の患者の 99% がこの検査で陽性反応を示し、正常な人ではたった 1% しか陽性反応を示さなかった.この病気にかかっている割合は国民全体の 0.5%であるという.
- (i) 無作為に選ばれた国民がこの検査を受けたとき、陽性反応が示される確率を求めよ.
- (ii) この検査を受けて陽性反応を示したという条件のもとで、実際この病気にかかっている確率がどれほどかを条件付き確率を求めることで示せ.
- 2 確率空間  $(\Omega,\mathcal{F},P)$  で定義された確率変数 X がパラメーター  $\lambda$  の指数分布に従うとする. 確率変数 X の積率母関数  $M_X(t)$  を求め, X の期待値 E[X] と分散 V[X] を計算せよ.
- ③ 確率空間  $(\Omega,\mathcal{F},P)$  上で定義された正の分散をもつ確率変数 X,Y と, 実数 t によって定まる確率変数 tX-Y の分散 V[tX-Y] が, t=0 において最小値をとるとする. X と Y の共分散  $\mathrm{Cov}(X,Y)$  の値を求めよ.
- $oxed{4}$  2 次元正規分布に従う確率変数  $igg(X \\ Yigg)$  について, V[X]=V[Y]=2 と  $\mathrm{Cov}(X,Y)=1$  が成立しているとする. 確率変数 W=4X+aY と確率変数 Z=2X+Y が独立となるように、実数 a の値を決定せよ.
- ・確率変数 X がパラメーター  $\lambda$  の指数分布に従うとは、X の確率密度関数が正の数  $\lambda$  を用いることにより

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & (x > 0) \\ 0 & (x \le 0) \end{cases}$$

として与えられることである.

科目名	数理統計学	対 象	2S-B	学 部研究科	理学部第一部	学 科 専攻科	数学	科	学籍番号		評点
平成:	20年7月25日(新	<b>金</b> ) ( ~	3 回目 - 時限目)	担当	金子 宏	学年		氏名			
試験時間	60 <sub>x</sub>	注意事項	① 筆記用具 2. 下記のみ (	以外持込 参照 持	à <del>a</del> ī						)

- 1 確率空間  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  における事象 A について P(A)>0 が満たされているとする.
- (i) 任意の事象 B について  $P(B^c | A) = 1 P(B | A)$  であることを示せ.
- (ii) 互いに排反な任意の 2 つの事象 B,C について  $P(B \cup C \mid A) = P(B \mid A) + P(C \mid A)$  であることを示せ.
- $2 \mid$  確率変数 X がパラメーター p の幾何分布に従うとする.
- $(i)\ m>\ell$  を満たす正の整数  $m,\ell$  に対して定まる条件付き確率  $P(X\geq m\,|\,X\geq\ell)$  を  $m-\ell$  と p で表せ.
- (ii)  $n>m>\ell$  を満たす正の整数  $\ell,m,n$  に対して定まる条件付き確率  $P(n>X\geq m\,|\,X\geq\ell)$  を  $n-\ell$  と  $m-\ell$  と p で表し、この条件付き確率が確率  $P(n-\ell>X\geq m-\ell)$  に等しいことを示せ.
- $oxed{3}$  確率変数 X と確率変数 Y が  $V[X]=4, V[Y]=2, \mathrm{Cov}(X,Y)=1$  を満たすとする. 実数 heta に対して, 確率変数  $U=\cos heta X-\sin heta Y$  と確率変数  $V=\sin heta X+\cos heta Y$  を定める.
- (i) Cov(U, V) を  $\theta$  で表せ.
- (ii) 実数  $\theta$  が動く場合の Cov(U,V) の最大値を求めよ.
- $\boxed{4}$  等式  $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2/2}dx=1$  が成立することを証明せよ.
- ・確率変数 X がパラメーター p の幾何分布に従うとは, 0 なる実数 <math>p について

$$P(X = k) = p(1 - p)^{k} (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

が満たされることである.

科目名	数理統計学	対 象	2S-A	学 部研究科	理学部第一部	学 科 専攻科	数学	料	学籍番号		評点
平成	20年7月30日(2	,	4 回目 ~ 時限目)	担当	金子 宏	学年		氏名			
試験時間	60 ,	注意事項	① 筆記用具I <del>2. 下記のみ</del>	以外持込 参照・持	不可 <del>公可</del>						)

- $oxed{1}$  確率空間  $(\Omega,\mathcal{F},P)$  における事象 A,B について  $P(A\cap B)>0$  が満たされているとする.
- (i) 任意の事象 C について  $P(A\cap B\cap C)=P(C\mid A\cap B)P(B\mid A)P(A)$  であることを示せ.
- $(ii) \ P(A\cap B\cap C) = \frac{1}{6} \ \text{かつ} \ P(A) = \frac{1}{2} \ \text{であり}, \ P(C\mid A\cap B) = P(B\mid A) \ \text{が成立しているとき}, \ P(B\mid A) \ \text{を求めよ}.$
- $ig|\ 2$  ig| 確率空間  $(\Omega,\mathcal{F},P)$  で定義された確率変数 X がパラメーター  $\lambda$  の指数分布に従うとし, a を正の数とする.
- (i) x>a を満たす正の数 x をとることにより定まる条件付き確率  $P(X>x\mid X\geq a)$  を x-a と  $\lambda$  で表せ.
- (ii) x>a を満たす正の数 x をとることにより定まる条件付き確率  $P(x\geq X\mid X\geq a)$  を x-a と  $\lambda$  で表し,  $P(x\geq X\mid X\geq a)=\int_a^x g(t)dt$  を満たす区間  $(a,\infty)$  上の非負関数 g を見つけよ.
- ③ 確率空間  $(\Omega,\mathcal{F},P)$  における確率変数 X が  $P(X=-1)=P(X=0)=P(X=1)=\frac{1}{3}$  を満たし、さらに確率変数 Y が Y=|X| により与えられているとする.
- (i) Cov(X, Y) を求めよ.
- (ii) 確率変数 X と確率変数 Y が独立であるか判定し、判定の根拠も含めて述べよ。
- $\fbox{4}$  正規分布  $N(m,\sigma^2)$  に従う確率変数 X の積率母関数  $M_X(t)=E[\,e^{tX}\,]$  を求めよ.

必要なら、実数 m および正の数  $\sigma$  に対して  $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx=1$  となることを用いてよい.

・ 確率変数 X がパラメーター  $\lambda$  の指数分布に従うとは, X の確率密度関数が正の数  $\lambda$  を用いることにより

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & (x > 0) \\ 0 & (x \le 0) \end{cases}$$

として与えられることである.

確率変数 X が正規分布  $N(m,\sigma^2)$  に従うとは, X が確率密度関数  $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$  をもつことである.

科目名	数理統計学	対 象	2S-A,B	学 部研究科	理学部第一部	学 科 専攻科	数学	料	学籍番号		評点
平成	19年7月27日(		3 回目 ~ 時限目)	担当	金子 宏	学年		氏名			
試 験 時 間	60 ,	注意事項	①. 筆記用具以 2. 下記のみ参	127 十土 1	जं						)

 $oxed{1}$  ある国の代表チームが勝つ確率は  $rac{1}{2}$  であると言われているが,ある攻撃パターンが機能した場合は,勝つ確率が  $rac{3}{4}$  になると言われている.この代表チームが勝つ事象を A とし,この攻撃パターンが機能する事象を B とする.以下の問に答えよ.ただし, $P(B)=rac{1}{2}$  と仮定し,上記の事柄は  $P(A)=rac{1}{2}$ , $P(A\,|\,B)=rac{3}{4}$  として扱えるとする.

- (i)  $P(A \cap B)$ ,  $P(A \cup B)$  を求めよ
- $\text{(ii) } P(B^c \mid A^c) = \frac{P(A^c \cap B^c)}{P(A^c)} \; (\texttt{この代表チームが勝てなかったという条件の下で、この攻撃パターンが機能していない条件付き確率)} \; を求めよ.$

2

- (i) 二項定理を用いて正の数  $\lambda,\mu$  について  $\sum_{k=0}^n rac{\lambda^k \mu^{n-k}}{k!(n-k)!} = rac{(\lambda+\mu)^n}{n!}$  であることを示せ.
- (ii)~X,Y~が独立な確率変数であり、X~がパラメーター  $\lambda~$  のポアソン分布に従い、Y~がパラメーター  $\mu~$  のポアソン分布に従うとき、X~と Y~ の和が自然数 n~ に一致する確率 P(X+Y=n)~を (i)~で検証した式を適用することにより求めよ.
- $\fbox{3}$  パラメーター  $\lambda$  の指数分布に従う確率変数 Z の期待値 E[Z] を求めよ.
- 4 断面が楕円形の卵を生む鳥にについて多数の卵を調べたところ,楕円の最も長い幅を X とし,最も短い幅を Y とすると, $\binom{X}{Y}$  は 2 次元正規分布に従っていて,V[X]=3,V[Y]=2, $\mathrm{Cov}(X,Y)=1$  であることが分かった.
- (i) X + Y の分散 V[X + Y] を求めよ.
- (ii) X + tY と Y が独立になるような実数 t を定めよ.
- ・確率変数 X がパラメーター  $\lambda$  のポアソン分布に従うとは,  $P(X=k)=rac{\lambda^k}{k!}e^{-k}\;(k=0,1,2,\cdots)$  を満たすことである.
- ・確率変数 Z がパラメーター  $\lambda$  の指数分布に従うとは, Z の確率密度関数が正の数  $\lambda$  を用いることにより

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & (x > 0) \\ 0 & (x \le 0) \end{cases}$$

として与えられることである.

科目名	数理統計学	対 象	2S-A,B	学 部研究科	理学部第一部	学 科 専攻科	数学	科	学籍番号		評点
平成	18年7月21日(	,	3 回目 ~ 時限目)	担当	金子 宏	学年		氏名			
試 験 時 間	60 🖁	注意事項	① 筆記用具以 2. 下記のみ参	↓ 外持込不 <del>注照・持込</del>	ज ज़						)

- 1. 事象 A,B が  $P(A)=\frac{1}{5},\ P(B)=\frac{1}{2},\ P(A\cap B^c)=\frac{1}{10}$  を満たすとき、次の確率を求めよ.
- (i)  $P(A \cap B)$
- (ii)  $P(A^c \cap B^c)$
- 2. 関数  $f(x)=\left\{egin{array}{ll} & \alpha xe^{-2x} & (x>0) & (x>0) & (x\le0) & (x\le0)$
- 3. 確率変数 X,Y の分散が V[X]=V[Y]=1 で与えられ、これらの共分散が  $\mathrm{Cov}(X,Y)=rac{1}{2}$  で与えられるとする.
- (i) X tY の分散 V[X tY] が最小となるような実数 t の値を求めよ.
- (ii) (i) で得られた実数 t について Cov(X-tY,Y)=0 が満たされることを示せ.
- $4. \ 2$  次元正規分布  $N(m{m},A)$  に従う確率変数  $X=inom{X_1}{X_2}$  について,ある 2 次正方行列 U をとることにより,2 次元確率変数

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} X_1 - m_1 \\ X_2 - m_2 \end{pmatrix}$$

における  $Y_1$  と  $Y_2$  が独立になることを示せ ただし,  $m{m}=\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}$  である.

科目名	数理統計学	対 象	2S-A,B	学 部研究科	理学部第一部	学 科 専攻科	数学	·科	学籍番号		評点
平成	17年7月22日(	,	3 回目 ~ 時限目)	担当	金子 宏	学年		氏名			
試 験 時 間	60 🛪	注意事項	① 筆記用具以 2. 下記のみ参	以外持込不 <del>:照·持込</del>	<u> </u>						)

- 1. 事象 A,B,C について,  $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B \mid A)P(C \mid A \cap B)$  であることを示せ.
- 2. 表が出る確率が p の硬貨を連続して投げて、初めて表が出たら投げるのをやめる。初めて表が出るまでに裏が連続して出る回数を Z で表す。確率変数  $Z^2$  の期待値を求めよ。
- 3. 確率変数 X,Y の同時分布の確率密度関数がある定数 c をとることにより

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} c \sin x \sin y & (0 \leq x, y \leq \pi) \\ 0 & (x \in [0, \pi] \text{ or } y \in [0, \pi]) \end{array} \right.$$

で与えられているとする.

- (i) 定数 c を求めよ.
- (ii) 2 つの確率変数 X,Y は独立であるといえるか、理由とともに示せ.
- 4. 期待値が 0 で、分散が 2 であるような 2 つの確率変数 X,Y が、 $\mathrm{Cov}(X,Y)=1$  を満たしているとする. ここで、 $\binom{X}{Y}$  が 2 次元正規分布に従うとするとき、 $\binom{U}{V}=B\binom{X}{Y}$  における、U,V が独立で、V の分散が 1 、U の分散が 1 より大きくなるような 2 次正方行列 B を 1 つ定めよ.
- ・ $inom{X}{Y}$  が 2 次元正規分布  $N(m{m},A)$  に従うとは,同時確率密度関数が

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det A}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left\langle \, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{m}, A^{-1}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{m}) \, 
ight
angle \, 
ight), \quad \boldsymbol{x} = egin{pmatrix} x_1 \ x_2 \end{pmatrix}$$

で与えられる確率変数である.

科目名	数理統計学	対 象	2S-A,B	学 部研究科	理学部第一部	学 科 専攻科	数学	·科	学籍番号		評点
平成	16年7月23日(	,	3 回目 ~ 時限目)	担当	金子 宏	学年		氏名			
試 験 時 間	60 🛪	注意事項	<ul><li>① 筆記用具以</li><li>2. 下記のみ参</li></ul>		. नो						)

- 1. 事象 A,B が  $P(A)=\frac{1}{5},\ P(B)=\frac{1}{2},\ P(A^c\cap B)=\frac{1}{10}$  を満たすとき、次の確率を求めよ.
- (i)  $P(A \cap B)$  (ii)  $P(A \cap B^c)$
- 2. 1 から 6 までの出る確率がすべて同じさいころを 6 が 3 回出るまで投げ続けるとき、それまでに 6 以外の 1 から 5 の目が出る回数を X とする.
- (i) このさいころを 9 回投げたとき, 6 の目が 3 回出る確率を求めなさい.
- (ii) P(X=6) を求めなさい.

3.

(i) 分散をもつ確率変数 X,Y,Z について、共分散についての関係式

$$Cov(X + Y, Z) = Cov(X, Z) + Cov(Y, Z)$$

が常に成り立つことを確かめよ.

- (ii) 確率変数 X,Y について、それぞれの分散が V[X]=3,V[Y]=4 であり、また、共分散について  $\mathrm{Cov}(X+Y,X)=5$  が満たされるとき、  $\mathrm{Cov}(X+Y,Y)$  を求めなさい、また、このとき X と Y が独立であるかどうかについて、理由もあわせて書きなさい。
- 4. 期待値 m, 分散  $\sigma^2$  をもつ正規分布を  $N(m,\sigma^2)$  とかく. 確率変数 X,Y が独立で, 確率変数 X が正規分布 N(3,4) に従い, 確率変数 Y が正規分布 N(2,9) に従うとする.
- (i) 確率変数 X-Y はどのような確率分布に従うか答えよ.
- (ii) P(X > Y) を求めなさい.

科目名	数理統計学	対 象	2S-A,B	学 部研究科	理学部第一部	学 科 専攻科	数学	料	学籍番号	-	評点
平成	15年7月23日(	,	3 回目 ~ 時限目)	担当	金子 宏	学年		氏名			
試験時間	60 a	注意事項	① 筆記用具以 2. 下記のみ参	· D77 +土 ` 1	=						)

- 1. 事象 A,B の確率については  $P(A)=\frac{1}{2},\ P(B)=\frac{2}{5}$  がわかっているという.
- (i) 事象 A, B が独立であるとき  $P(A \cup B)$  を求めよ.
- (ii) 事象 A, B が互いに排反であるとき  $P(A^c \cap B^c)$  を求めよ.
- 2. パラメーター  $\lambda$  のポアソン分布に従う確率変数 X の積率母関数を求め、確率変数 X の平均と分散を調べよ.
- 3. 確率変数 X,Y の同時確率密度関数がある定数 C をとることにより

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{C}{(1+x+y)^n} & \text{if } x > 0 \text{ and } y > 0\\ 0 & \text{if } x \le 0 \text{ or } y \le 0 \end{cases}$$

- のように表されている. ただし, n は 3 以上の整数である.
- (i) 定数 C を求めよ.
- (ii) 確率変数 X, Y の独立性を判定し、根拠とともに述べよ.

4

- (i) 確率変数 Y の分布関数 G(x) が微分可能な関数であるとき, Y の確率密度関数 g(x) は関数 G(x) の導関数 G'(x) で与えられることを検証せよ.
- (ii) 標準正規分布 N(0,1) に従う確率変数 X と関数  $h(x)=e^x$  の合成によって得られる確率変数 Y=h(X) の確率密度関数を書け.
- ・確率変数 X がパラメーター  $\lambda$  のポアソン分布に従うとは

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \qquad (k = 0, 1, \dots)$$

を満たすことである.

・標準正規分布 N(0,1) に従う確率変数の確率密度関数は次で与えられる:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

科目名	数理統計学	対 象	2S-A,B	学 部研究科	理学部第一部	学 科 専攻科	数学	科	学籍番号		評点
平成	14年7月23日(	,	3 回目 ~ 時限目)	担当	金子 宏	学年		氏名			
試 験 時 間	60 ,	注意事項	①. 筆記用具以 <del>2. 下記のみ参</del>		. नो						)

1. 2 つの事象 A, B があり, P(A) > 0 であるとするとき

$$P(A \cap B \mid A) \ge P(A \cap B \mid A \cup B)$$

が成り立つことを検証せよ.

- 2. 表が出る確率  $p\ (p>0)$  のコインを表が 2 回出るまで連続して投げる. 1 回目の表が出るまでに裏が出た回数を X とし, 1 回目に表が出てから 2 回目の表が出るまでに、裏が出た回数を Y とする.
- (i) 負でない整数  $k,\ell$  について,  $P(X=k,Y=\ell)$  を求めよ.
- (ii) 確率変数 X,Y は独立であることを示せ.

3.

- (i)  $\lambda>0$  とし,  $P(k)=\int_k^{k+1}\lambda e^{-\lambda t}\,dt\;(k=0,1,\cdots)$  を計算せよ.
- (ii) 確率変数 X がパラメーター  $\lambda>0$  の指数分布に従うとき, X の値の整数部分によって定まる確率変数 Y は幾何分布に従うことを確かめよ.
- 4.~~X,Y,Z が独立であり、それぞれの正規分布  $N(m_1,\sigma_1^2),N(m_2,\sigma_2^2),N(m_3,\sigma_3^2)$  に従うとき  $\binom{U}{V}=\binom{X+Y}{Y+Z}$  で定められる確率変数は 2 次正規分布  $N(m{m},A)$  に従う. これが正しい理由の概略を述べた上でベクトル  $m{m}$  と 2 次対称行列 A を求めよ.
- ・確率変数 X がパラメーター  $\lambda$  の指数分布に従うとは, X の確率密度関数が正の数  $\lambda$  を用いることにより

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & (x \ge 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

として与えられることである.

・確率変数 X がパラメーター p の幾何分布に従うとは, 0 なる実数 <math>p について  $P(X = k) = p(1-p)^k$   $(k = 0, 1, 2, \cdots)$  が満たされることである.

科目名	数理統計学	対 象	2S-A,B	学 部研究科	理学部第一部	学 科 専攻科	数学	料	学籍番号		評点
平成	13年7月24日(	,	2 回目 ~ 時限目)	担当	金子 宏	学年		氏名			
試 験 時 間	60 ,	注意事項	①. 筆記用具以 <del>2. 下記のみ参</del>		ਮ <del>ਜ</del> ਾਂ						)

- 1.  $P(A)P(B) > \frac{1}{2}$  であるとき,  $A \cap B$  は空事象でないことを示せ.
- 2. n 個の確率変数  $X_1,X_2,\cdots,X_n$  について、相異なる 2 つの確率変数同士の共分散が  $\mathrm{Cov}(X_i,X_j)=a_{ij}\;(i 
  eq j)$  で表され、それぞれの分散が  $V[X_i]=a_{ii}\;(i=1,2,\cdots,n)$  で表されるとする.このとき、確率変数  $Y=b_1X_1+b_2X_2+\cdots+b_nX_n$  の分散 V[Y] を行列  $A=(a_{ij})$  とベクトル  $\mathbf{b}={}^t(b_1,b_2,\cdots,b_n)$  を用いて表せ.
- 3. 公正な硬貨を 100 回投げたとき,表の出る回数が 45 回以上でありかつ, 55 回以下である確率を正規分布表を用いて求めよ.

4.

- (i) X が自由度 n の  $\chi^2$  分布に従うとき, X の積率母関数  $M_X(t)$  を求めよ.
- (ii) 確率変数 X,Y が独立で、それぞれ自由度 n,m の  $\chi^2$  分布に従うとき X+Y はどのような確率分布に従うか理由とともに述べなさい.
- ・確率変数 X が自由度 n の  $\chi^2$  分布に従うとは、自然数 n について、その確率密度関数が

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n-2}{2}} e^{-\frac{x}{2}} & (x > 0) \\ 0 & (x \le 0) \end{cases}$$

として与えられることである. ただし,  $\Gamma(y) = \int_0^\infty x^{y-1} e^{-x} \, dx$  である.

科目名	数理統計学	対 象	2S-A,B	学 部研究科	理学部第一部	学 科 専攻科	数学	·科	学籍番号		評点
平成〔	12年7月24日(	,	2 回目 ~ 時限目)	担当	金子 宏	学 年		氏名			
試験時間	60 ,	注意事項	①. 筆記用具以 <del>2. 下記のみ参</del>		=						)

- 1. 公正な2つのさいころをふる.2つの目の和が偶数であるという条件のもとでの.2つの目の積が12である確率はいくらか.
- 2. 確率変数 X が指数分布に従うとき、次の関係式を証明せよ:

$$P(X \le a + b \mid X > b) = P(X \le a) \quad (a > 0, b > 0)$$

- 3. n 個の確率変数  $X_1, X_2, \cdots, X_n$  について、相異なる 2 つの確率変数同士の共分散が  $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = a_{ij} \ (i \neq j)$  で表され、それぞれの分散が  $V[X_i] = a_{ii} \ (i = 1, 2, \cdots, n)$  で表されるとする。このとき、確率変数  $Y = b_1 X_1 + b_2 X_2 + \cdots + b_n X_n$  と  $Z = c_1 X_1 + c_2 x_2 \cdots + c_n X_n$  の共分散  $\mathrm{Cov}(Y, Z)$  をベクトル  $\mathbf{b} = {}^t(b_1, b_2, \cdots, b_n), \mathbf{c} = {}^t(c_1, c_2, \cdots, c_n)$  および行列  $A = (a_{ij})$  を用いて表せ。
- 4.~~X,Y がともに期待値 0 の確率変数であり,  $inom{X}{Y}$  が 2 次元正規分布  $N(\mathbf{0},A)$  に従うとき  $inom{X}{Y}$  の同時確率密度関数 f(x,y) は

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}}\exp\bigg(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\Big\{\frac{x^2}{\sigma_X^2} - 2\rho\frac{xy}{\sigma_X\sigma_Y} + \frac{y^2}{\sigma_Y^2}\Big\}\bigg)$$

という表示をもつことを示せ. ただし,  $\sigma_X$  は X の標準偏差,  $\sigma_Y$  は Y の標準偏差,  $\rho$  は X,Y の相関係数をそれぞれを表す.

・確率変数 X が指数分布に従うとは、ある  $\lambda > 0$  について X の確率密度関数が

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & (x \ge 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

として与えられることである.

・ $inom{X}{Y}$  が正規分布  $N(m{m},A)$  に従うとは、その同時確率密度関数が

$$f(oldsymbol{x}) = rac{1}{2\pi\sqrt{\det A}} \exp\Bigl(-rac{1}{2}\left\langle oldsymbol{x} - oldsymbol{m}, A^{-1}(oldsymbol{x} - oldsymbol{m})
ight
angle, \quad oldsymbol{x} = egin{pmatrix} x_1 \ x_2 \end{pmatrix}$$

で与えられる確率変数である.

科目名	数理統計学	対 象	2S-A,B	学 部研究科	理学部第一部	学 科 専攻科	数学	料	学籍番号		評点
平成	11年7月26日(	. ,	2 回目 ∼ 時限目)	担当	金子 宏	学 年		氏名			
試 験 時 間	60 ,	注意事項	①. 筆記用具以 <del>2. 下記のみ参</del>		. नो						)

- 1. 公正なさいころを 2 回投げる試行について少なくとも 6 が 1 回出るという条件の下での出た目の積が 18 以上である確率を計算しなさい.
- 2.~~2 次元確率変数  $inom{X}{Y}$  の同時分布の確率密度関数が

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & (0 < x < 1, 0 < y < 1) \\ 0 & (|x| \ge 1 \text{ or } |y| \ge 1) \end{cases}$$

で表されるとする.

- (i) 確率変数 X の周辺分布の確率密度関数  $f_X$  と確率変数 Y の周辺分布の確率密度関数  $f_Y$  を求めよ.
- (ii)  $X \ge Y$  は独立か?理由も一緒に書きなさい.
- (iii) 期待値 *E*[XY] を計算せよ.
- 3. 3 次元確率変数  $egin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$  が,あるベクトル  $m{m} = egin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$  と狭義正定値 3 次正方行列  $A = egin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  によって与えられる正規分布  $N(m{m},A)$  に 従っているとする.このときの期待値 E[XYZ] を求めなさい.ただし,正規分布  $N(m{m},A)$  の積率母関数  $M(t_1,t_2,t_3)$  は変数  $m{t} = (t_1,t_2,t_3)$  を用いて  $M(m{t}) = \exp\left(\langle m{m}, m{t} \rangle + \frac{1}{2}\langle m{t}, A m{t} \rangle\right)$  で表され, $E[XYZ] = \frac{\partial^3}{\partial t_1 \partial t_2 \partial t_3} M(m{0})$  が成り立つことは証明せずに使ってよい.
- $4. \quad X,Y$  は独立な確率変数であり、それぞれ正規分布 N(7,9),N(3,16) に従うとする. 確率 P(X-Y<6.9) を表から求めなさい.
- ◇ 表から値が求まらない場合は、最も近い値を答えなさい.

科目名	数理統計学	対 象	2S-A,B	学 部研究科	理学部第一部	学 科 専攻科	数学	料	学籍 番号		評点
平成	10年7月27日(	,	2 回目 ∼ 時限目)	担当	金子 宏	学 年		氏名			
試験時間	60 ,	注意事項	①. 筆記用具以 <del>2. 下記のみ参</del>		ਮ <del>ਜ</del> ਾਂ						)

1. P が確率測度であり, A,B,C が  $P(A\cap B)>0$  を満たす事象であるとき

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B \mid A)P(C \mid A \cap B)$$

であることを示せ.

2.  $X_1, X_2$  が独立な確率変数で、それぞれ平均が m、分散が  $\sigma^2$  であるとする。確率変数

$$Y = a_1 X_1 + a_2 X_2 (a_1, a_2$$
は実定数)

の分散 V[Y] を計算せよ. さらにもう 1 つの確率変数  $Z=b_1X_1+b_2X_2$   $(b_1,b_2$ は実定数) が与えられているとき、共分散  $\mathrm{Cov}(Y,Z)$  と相関係数  $\rho(Y,Z)$  を求めよ.

3.~~2 次元確率変数  $inom{X}{Y}$  の確率密度関数が、ある正定数 k により  $ke^{-(x^2+xy+2y^2)}$  で表されるような 2 次元正規分布に従っているとする. つまり、

$$P(a \le X \le b, c \le Y \le d) = \int_a^b \left( \int_c^d k e^{-(x^2 + xy + 2y^2)} dy \right) dx \ (\forall a, b, c, d \in \mathbb{R})$$

が成り立っているとする.

- (i)  $x^2 + xy + 2y^2 = \alpha(x + \beta y)^2 + \gamma y^2$  を満たすような定数  $\alpha, \beta, \gamma$  を求めよ.
- (ii) x について積分し、さらに y について積分することにより k を決定せよ.
- (iii) Y の周辺確率密度関数を求めよ.

ただし
$$,\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx=\sqrt{2\pi}$$
 は証明せずに用いてよい.

- 4. 20 歳の日本の女子の身長は平均 158.5cm, 標準偏差 5.3cm の正規分布に従っているという。 20 歳の日本の女子のうちで身長が  $(158.5-\alpha)$  cm と  $(158.5+\alpha)$  cm の間にある割合が全体の 0.95 をしめるという。  $\sigma$  の値を決定せよ。
- ◇ 表から値が求まらない場合は、最も近い値を答えなさい.

科目名	数理統計学	対 象	2S-A,B	学 部研究科	理学部第一部	学 科 専攻科	数学	<b>科</b>	学籍番号		評点
平成 9	9年7月22日(火	,	3 回目 ~ 時限目)	担当	金子 宏	学年		氏名			
試験時間	60 ,	注意事項	①. 筆記用具以 <del>2. 下記のみ参</del>		=						)

- 1. パラメーター  $\lambda_1$  のポアソン分布に従う確率変数 X とパラメーター  $\lambda_2$  のポアソン分布に従う確率変数 Y がある. 負でない整数 k について P(X+Y=k) を計算せよ.
- 2.~~X と Y を独立な確率変数とするとき確率変数 W=XY の平均と分散を求めよ. ただし, X,Y のそれぞれの平均を  $\mu_X,\mu_Y$ , 分散を  $\sigma_X^2,\sigma_Y^2$  とする.
- 3. XとYの結合確率密度関数が

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & (|x| \le y, 0 \le y \le 1) \\ 0 & (y < 0 \text{ or } y > 1 \text{ or } |x| > y) \end{cases}$$

で与えられているとする.

- (i) X と Y それぞれの周辺確率密度関数を求めよ.
- (ii) Cov(X,Y) を求めよ.
- (iii)  $X \ge Y$  が独立であるか判定し、その理由も答えよ.
- 4.~~X が正規分布  $N(0.28,(0.002)^2)$  に従うとき,  $P(X \le a) = 0.9$  を満たす a の値を表より求めよ.
- ◇ 表から値が求まらない場合は、最も近い値を答えなさい.
- $\Diamond X$  がパラメーター  $\lambda$  のポアソン分布に従うとは

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad k = 0, 1, \dots$$

を満たすことである.