数理パズル…穴埋め筆算

東京理科大学第一部数学研究部複素解析ゼミ

1. ちょっとした整数 $\cdots$ 筆算の問題

まず始めに簡単なので，問題を明示しよう．

$$\begin{array}{rccc} & a_1 & a_2 & a_3 \\ + & a_4 & a_5 & a_6 \\ \hline & a_7 & a_8 & a_9 \end{array}$$

といった具合に三桁の自然数と三桁の自然数の和が三桁の自然数であったとき，各自然数の一の位，十の位、百の位を文字 a_i に対応できたとする．
このとき当然，任意の $i \in A = \{1, 2, \cdots, 9\}$ について a_i は 0 から 9 までの自然数であるわけだが，このとき，

$$\forall i \in A[a_i \neq 0]$$

として，かつ，

$$\forall i, j \in A[i \neq j \Rightarrow a_i \neq a_j]$$

をみたす列 $(a_i)_{i \in A}$ は存在するか．簡単に言えば上のこの筆算の式を 1 から 9 の自然数をすべて使って埋められるか，と言うことだ．

結論を言ってしまえば，存在はする．実際に適当な数を入れて計算していけば，このような列を見つけることは，意外とたやすい．つまり「存在」の証明であれば，それは筆算ができれば示せる．つまり，本当に小学生でも証明可能な問題である．さてここでワンステップ上の問題を考えよう．具体的にはその計算方法の確立，そしてそれに伴って，いったい何通りの列を考える事ができるのか，実際に考えてみよう $\cdots$

2. 穴埋め算

これからするの話しは，実際に議論し，我々数学研究部の複素解析ゼミのメンバーが試行錯誤し至ったとりあえずの結論である．どうやって算法を考えるのか．簡単に言えば，ほんの少し高度な穴埋め算の要領で条件を引き出していく．まずそのような列があったとして，何が成り立つのかを考えよう．

$$\begin{array}{rccc} & a_1 & a_2 & a_3 \\ + & a_4 & a_5 & a_6 \\ \hline & a_7 & a_8 & a_9 \end{array}$$

始めに，筆算の縦の列に注目してほしい．左から 3 列目だが，数式で表すと単純に表せば，

$$a_3 + a_6 - a_9 = 0 \text{ または } 10$$

ここで b_3 =(左辺) とおこう．このとき b_3 が 0 であれば繰り上がりが無いことが，そうでなければ繰り上がりがあることが分かる．さらに，

$$b_2 = a_2 + a_5 - a_8 + \frac{b_3}{10}$$

とおき、繰り上がりをうまく表現することで，２列目について $b_2 = 0$ または 10 を得て，同様に，

$$b_1 = a_1 + a_4 - a_7 + \frac{b_2}{10}$$

とおく事で $b_1 = 0$ または 10 を得るが，左から 1 列目には繰り上がりがないので，$b_1 \neq 10$ である．さて，ここで場合分けといこう．上での定義で下のようなパターンがある．

$$(b_1, b_2, b_3) = (0, 10, 10) or (0, 0, 10) or (0, 10, 0) or (0, 0, 0)$$

ここで注意してみると，実は後ろの二つは同一視できることが分かる．繰り上がりの影響を受ける列と繰り上がる縦列をセットにして，繰り上がらない縦列と交換すればいい．専門的な言葉をほんの少し使って言うなら，おのおのその条件を満たすような列 $(a_i)_{i\in A}$ の集合を作ったときに自然な全単射を作ることができると言うことである．また，列自体に番号をつけたなら，３次の置換を用いた表現も可能である．話しを元に戻すが，これによって実際には $(0, 10, 10)$ と $(0, 0, 10)$ の場合をそれぞれ考えれば良いことが分かった．では双方を詳しく見ていこう．

(0,10,10) の場合さて，このとき条件を満たすような列が存在するか．実は答えは NO だ．$1, 2, \cdots, 9$ の総和は 45. 当然，条件を満たすような列 $(a_i)_{i\in A}$ の総和も 45 である．ここで、$(b_1, b_2, b_3) = (0, 10, 10)$ という条件を言い直してみよう．

$$\begin{aligned} &(1) & a_1 + a_4 - a_7 &= -1 \\ &(2) & a_2 + a_5 - a_8 &= 9 \\ &(3) & a_3 + a_6 - a_9 &= 10 \end{aligned}$$

これらの式を足して，-1 をかけて，さらに次の式を引く．

$$\sum_{i=1}^{9} a_i = 45$$

これによって以下の式を得る．

$$2(a_7 + a_8 + a_9) = 27$$

ここで，この式を満たす組 (a_7, a_8, a_9) について，その要素のどれか一つは自然数でなく分数となってしまう．よって条件を満たす列 $(a_i)_{i\in A}$ は存在しない．注意：左辺は偶数だが，右辺は奇数 $\cdots$ んっ !? これは !? といった具合に．

以上の議論によって実は $(\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \mathbf{b_3}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{10})$ の場合のみ考えれば良いことが分かった．注意：(0,0,0) の場合も同様に存在しないことが導かれる．実際に計算してみよ．

さて，では $(b_1, b_2, b_3) = (0, 0, 10)$ の場合について議論しよう．先程の (1) から (3) の式と

同じように式を作ると，

$$a_1 + a_4 - a_7 = 0 \tag{4}$$
$$a_2 + a_5 - a_8 = -1 \tag{5}$$
$$a_3 + a_6 - a_9 = 10 \tag{6}$$

さらに，先程と同じ操作によって，

$$2(a_7 + a_8 + a_9) = 36$$

従って，

$$a_7 + a_8 + a_9 = 18$$

ここで $\max a_7, a_8, a_9$ を取ったとき，これは 7 以上でなくてはならない．なぜなら，6 であった場合，$a_7 + a_8 + a_9$ の値は最大でも $15 \cdots (4, 5, 6)$ よって，条件を満たさない．これによって，a_7, a_8, a_9 のうちどれか一つは，$7, 8, 9$ のどれかであるという事が分かる．

さてさて，これ以上は条件を絞れなさそうなので，ここからは実際に計算していって求めてみる．全部はさすがに無理なので，a_7, a_8, a_9 のうち一つが，7 の場合を計算してみる．

$$a_7 + a_8 + a_9 = 18$$

であったので，

$$\{a_7, a_8, a_9\} = \{5, 6, 7\}$$

となる．
では，$a_7 = 5$ を仮定すると，(4) 式により，$\{a_1, a_4\} = \{1, 4\}$ または $\{2, 3\}$.
前者を仮定し，さらに $a_8 = 6$ を仮定すると，(5) 式によって $\{a_2, a_5\} = \{2, 3\}$.
そして残ったものを当てはめると，

$$\begin{array}{rccc} & 1 & 2 & 9 \\ + & 4 & 3 & 8 \\ \hline & 5 & 6 & 7 \end{array}$$

といった具合に，条件を満たすものを見つけることができた．(一応，最初の問題の証明終了)

実はこれを計算していくと，どうやら筆算を見る限り，対称性が見え隠れ，置換が見え隠れするのだが…なかなか．たとえば，上段二段は入れ替えても大丈夫だったり，上段の一段目と二段目を隣と交換しても大丈夫だったりする．これはうまく表現できないのだろうか…という問題提起もって，このノートの終わりとする…．

ノート作成者：黒田翔太