複素解析ゼミノート

発表者：中山智文

Thm2.1.1
(1) コンパクト集合上の連続関数 f は有界であり，$|f(z)|$ は最大値を取る.
(2) コンパクト集合上の連続関数は一様連続.

$proof)$
(1) を証明する．有界性と最大値の存在という二つの要素に分けて証明していこう.

有界性

f をコンパクト集合上の連続関数とする．連続性により任意の $\epsilon > 0$ と $a \in A$ に対し，ある $\delta(a) > 0$ が以下の条件を満たすものとして存在する.

$$z \in \Delta(a, \delta(a)) \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

すると $\{\Delta(a; \frac{\delta(a)}{2}) | a \in A\}$ が A の開被覆になっている．*Thm.1.3.6* より，有限個の点

$$a_1, a_2, \cdots, a_i \in A$$

が存在して，

$$A \subseteq \bigcup_{j \in A} \Delta(a; \frac{\delta_j}{2}), \delta_j = \delta(a_j)$$

したがって，任意の $z \in A$ をとると，ある j があって，$z \in \Delta(a; \frac{\delta_j}{2}))$ となり，

$$|f(z) - f(a)| < \epsilon$$

これによって，以下のように式変形を繰り返し，有界性が言える.

$$\begin{aligned} |f(z)| &= |f(z) - f(a_j) + f(a_j)| \\ &\leqslant |f(z) - f(a)| + |f(a_j)| \\ &< \epsilon + |f(a_j)| \\ &\leqslant \epsilon + \max\{|f(a_j)|, 1 \leqslant j \leqslant l\} \end{aligned}$$

最大値の存在

有界であるから $\{|f(x)||z \in A\}$ には，上限が存在する．これを M とおく．A の点列 $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ をその極限が M となるようにとる．A のコンパクト性により，部分列を取ることによって，$\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ は $z_0 \in A$ に収束する．したがって，

$$|f(z_0)| = \lim_{n \leftarrow \infty} |f(z_n)| = M$$

により，$|f(z)|$ には最大値が存在する.（証明終了）

Date: 2011/5/17.

実は，以上の議論には，少しとび *(leap)* がある．たとえば，本当に M に収束するような $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ という列を「本当に取ることができるのか」．これは各自の課題として，これからの問題として提起し，以降で説明をしていくものとする．

(2) ここで *(1)* と同じ $\{\delta_j\}$ という列を利用する．$\delta_0 = \min\{\delta_j | 1 \leqslant j \leqslant l\}$ として，$z, w \in A$ を $|z-w| < \frac{\delta_0}{2}$ となるような，任意の点とする．このとき、ある j があって，$z \in \Delta(a_j; \frac{\delta_j}{2})$ となる．よって，$w \in \Delta(a_j; \delta_j)$．これから，

$$|f(z) - f(w)| \leqslant |f(z) - f(a_j)| + |f(w) - f(a_j)| < 2\epsilon$$

(証明終了)

ノート作成者:黒田翔太