幾何学テスト対策

2011 年 7 月 31 日

内積を $<\mathbf{a},\mathbf{b}>$ とする

1.

曲線.$\mathbf{x}:[0,2\pi]\longrightarrow\mathbb{R}^3$、$\mathbf{x}(t)=(\sqrt{2}\cos t,\sin t-t,\sin t+t)$ とする

(1) 曲線を弧長によってパラメーターづけせよ

(2) 曲線の長さを求めよ

(3) 曲線の曲率、捩率を求めよ

(参考：直接求めてもいいが、適当に合同変換したものの曲率、捩率を求めてもよい)

(平成２１年の過去問より抜粋)

(1)

$$y=f(x)=\int_0^x\|\mathbf{x}'(s)\|ds=\int_0^x\sqrt{(-\sqrt{2}\sin s)^2+(\cos s-1)^2+(\cos s+1)^2}ds=2x$$
$$x=f^{-1}(y)=\frac{y}{2}$$
$$\hat{x}(t)=(\sqrt{2}\cos\frac{t}{2},\sin\frac{t}{2}-\frac{t}{2},\sin\frac{t}{2}+\frac{t}{2})$$

(2)

$$\int_0^{2\pi}\sqrt{(-\sqrt{2}\sin s)^2+(\sin s-s)^2+(\sin s+s)^2}ds=4\pi$$

よって曲線の長さは 4π

(3)

$$(\sqrt{2}\cos t,\sin t-t,\sin t+t)=(\sqrt{2}\cos t,\ \sqrt{2}\sin t,\ \sqrt{2}t)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

これは直行行列であり向きを保つ変換である

$\mathbf{y}(t) = (\sqrt{2}\cos t,\ \sqrt{2}\sin t,\ \sqrt{2}t)$ とすると $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ の捩率と曲率関数は等しい

$$y = f(x) = \int_0^x \|\mathbf{x}'(s)\| ds = \int_0^t \sqrt{(-\sqrt{2}\sin t)^2 + (\sqrt{2}\cos t)^2 + ((\sqrt{2})^2})ds = 2x$$
$$\hat{\mathbf{y}}(t) = (\sqrt{2}\cos\tfrac{t}{2},\ \sqrt{2}\sin\tfrac{t}{2},\ \tfrac{\sqrt{2}}{2}t)\ ,\ \hat{\mathbf{y}}'(t) = (-\tfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\tfrac{t}{2}, \tfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\tfrac{t}{2}, \tfrac{\sqrt{2}}{2})$$
$$\hat{\mathbf{y}}''(t) = (-\tfrac{\sqrt{2}}{4}\cos\tfrac{t}{2}, -\tfrac{\sqrt{2}}{4}\sin\tfrac{t}{2}, 0)\ ,\ \mathbf{t}(s) = \hat{\mathbf{y}}'(t)$$
$$\mathbf{n}(t) = \frac{\hat{\mathbf{y}}''(t)}{\|\hat{\mathbf{y}}''(t)\|} = \hat{\mathbf{y}}''(t) = (-\tfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\tfrac{t}{2}, -\tfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\tfrac{t}{2}, 0)$$
$$\mathbf{n}'(t) = (\tfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\tfrac{t}{2}, -\tfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\tfrac{t}{2}, 0)$$
$$\mathbf{b}(t) = \mathbf{t}(t) \times \mathbf{n}(t) = (-\tfrac{1}{2}t\sin\tfrac{t}{2}, \tfrac{1}{2}t\cos\tfrac{t}{2}, 0)$$
$$\hat{\kappa}(t) = \|\hat{\mathbf{y}}''(t)\| = \tfrac{1}{2},\quad \hat{\tau}(t) = <\mathbf{n}'(t), \mathbf{b}(t)> = -\tfrac{\sqrt{2}}{4}t$$
$$\kappa(t) = \tfrac{1}{2},\ \ \tau(t) = -\tfrac{\sqrt{2}}{2}t$$

コメント:捩率、曲率は一般パラメータと弧長パラメータの二つがあり、一般パラメータの捩率、曲率は弧長パラメータによって定義されることに注意。

2.

$\mathbf{x} : I = [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}^3; C^\infty$級正則曲線, $(\forall s \in I)[\|\mathbf{x}''(s)\| \neq 0]$, τ、κ を捩率、曲率関数とする
このとき

$\mathbf{x}$ が定傾曲線である $\Longleftrightarrow$ $\frac{\tau}{\kappa}$ 定値関数である

proof

$\hat{\mathbf{x}}$ を $\mathbf{x}$ を弧長パラメータに取り替えた曲線とする.

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x} \circ f^{-1},\quad f(t) = \int_\alpha^t \|\mathbf{x}'(s)\| ds$$

また同様に捩率、曲率関数を弧長パラメーターに取り換えたものを $\hat{\tau}$、$\hat{\kappa}$ とする.
定義より明らかに

$\mathbf{x}$ が定傾曲線である $\Longleftrightarrow$ $\hat{\mathbf{x}}$ が定傾曲線である.
$\frac{\hat{\tau}}{\hat{\kappa}}$ が定値写像である $\Longleftrightarrow$ $\frac{\tau}{\kappa}$ が定値写像である.

それゆえ、$\mathbf{x}$ は弧長パラメータである時を示せばよいことがわかるので
以下 $\mathbf{x}$ を弧長パラメータ,$I = [0, l]$, $l = \int_\alpha^\beta \|\mathbf{x}'(s)\| ds$ であるとする.

$(\Longrightarrow)$

$\mathbf{x}$ は定傾曲線であるから、ある単位ベクトル $\mathbf{a}$、定数 $0 \le d \le 1$、任意の $s \in I$ に対して

$$< \mathbf{t}(s), \mathbf{a} >= d\ ,\quad 2 < \mathbf{t}'(s), \mathbf{a} >= 0\ ,\quad 2 < \kappa(s)\mathbf{n}(s), \mathbf{a} >= 0\ ,\quad < \mathbf{n}(s), \mathbf{a}(s) >= 0$$

$\mathbf{a}$ は $\mathbf{t}(s)$ と $\mathbf{b}(s)$ の一次結合で表され、それぞれ係数は $< \mathbf{t}(s)$、$\mathbf{a} >$、$< \mathbf{b}(s)$、$\mathbf{a} >$
また仮定から

$$< \mathbf{t}(s)、\mathbf{a} >= d$$

さらに

$< \mathbf{b}(s)、\mathbf{a} >' = 2,\ < \mathbf{b}'(s)、\mathbf{a} >= 2,\ < -\tau(s)\mathbf{n}(s), \mathbf{a} >= 0$
$< \mathbf{b}(s)、\mathbf{a} >= c$、c は定数
$\mathbf{a} = d\mathbf{t}(s) + c\mathbf{b}(s) \quad \mathbf{a}' = d\kappa(s)\mathbf{n}(s) + c(-\tau\mathbf{n}(s)) = 0$
$(d\kappa(s) - c\tau(s))\mathbf{n}(s) = 0$
$d\kappa(s) - c\tau(s) = 0 \quad (\|\mathbf{n}(s)\| = 1$ であるから$)$
$c\frac{\tau(s)}{\kappa(s)} = d$
$1 =< \mathbf{a}, \mathbf{a} >= d^2 + c^2 = c^2 + (c\frac{\tau(s)}{\kappa(s)})^2$
$1 = c^2(1 + (\frac{\tau(s)}{\kappa(s)})^2)$
$0 < c^2\ ,\ c \neq 0$
$\frac{\tau(s)}{\kappa(s)} = \frac{d}{c}$

よって定値関数であることが示された
$(\Longleftarrow)$

$\frac{\tau}{\kappa}$ が定値関数とする
$(\frac{\tau(s)}{\kappa(s)}\mathbf{t}(s) + \mathbf{b}(s))' = \frac{\tau(s)}{\kappa(s)}\kappa(s)\mathbf{n}(s) - \tau(s)\mathbf{n}(s) = 0$
$a = \frac{\tau(s)}{\kappa(s)}\mathbf{t}(s) + \mathbf{b}(s)$ とすると a は定ベクトルで $\|a\| \neq 0$
$a' = \frac{a}{\|a\|}$ とする $\|a'\| = 1$ である
$< \mathbf{t}(s), \mathbf{a}' >= \frac{<\mathbf{t}(s),\mathbf{a}>}{\|a\|} = \frac{<\mathbf{t}(s), \frac{\tau(s)}{\kappa(s)}\mathbf{t}(s)+\mathbf{b}(s)>}{\|a\|}$
$= \frac{1}{\|a\|}(\frac{\tau(s)}{\kappa(s)} < \mathbf{t}(s), \mathbf{t}(s) > + < \mathbf{t}(s), \mathbf{b}(s) >)$
$= \frac{1}{\|a\|}\frac{\tau(s)}{\kappa(s)}, I \neq \phi$ であるから $s_0 \in I, d = \frac{1}{\|a\|}\frac{\tau(s_0)}{\kappa(s_0)}$ とすると
$(\forall s \in I)[< \mathbf{t}(s), a' >= d]$
よって x は定傾曲線

(証明終わり)

コメント:22 年、20 年が球面曲線、21 年が定傾曲線が出題されたので今年は定傾曲線が出題されるのではないかと思われる。

$\Rightarrow$ はフルネの公式がとても便利であるので、微分を何度もして多くの情報を引き出すとよい。

$\Leftarrow$ は $\Rightarrow$ で得られた情報を元に定ベクトルを構成する。

3.

$\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2} : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$; 弧長パラメータ、$C^\infty$ 級正則曲線とする

$\mathbf{x_1}$ の捩率、曲率関数を κ_1,τ_1,$\mathbf{x_2}$ の捩率、曲率関数を κ_2,τ_2 とする

$T \circ x_1 = x_2$ となる向きを保つ合同変換が存在することを示せ.

proof

$\{\mathbf{t}_1, \mathbf{n}_1, \mathbf{b}_1\}$ を $\mathbf{x_1}$ のフルネ標構場、$\{\mathbf{t}_2, \mathbf{n}_2, \mathbf{b}_2\}$ を $\mathbf{x_2}$ のフルネ標構場とする。

$B(s), C(s), Y(s)$ を関数を成分にもつ 3 × 3 行列を

$B(s) := (\mathbf{t}_1(s), \mathbf{n}_1(s), \mathbf{b}_1(s))$

$C(s) := (\mathbf{t}_2(s), \mathbf{n}_2(s), \mathbf{b}_2(s))$

$$Y(s) := \begin{pmatrix} 0 & -\kappa_1(s) & 0 \\ \kappa_1(s) & 0 & -\tau_1(s) \\ 0 & \tau_1(s) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa_2(s) & 0 \\ \kappa_2(s) & 0 & -\tau_2(s) \\ 0 & \tau_2(s) & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(仮定から)}$$

と定義する

$\frac{d}{ds}B(s) = Y(s)B(s) \quad \frac{d}{ds}C(s) = Y(s)B(s)$

$\frac{d}{ds}(C(s)^{-1}) = -C(s)^{-1}(\frac{d}{ds}C(s))C(s)^{-1} = -C(s)^{-1}Y(s)C(s)C(s)^{-1} = -Y(s)C^{-1}(s)$

$\frac{d}{ds}(B(s)C^{-1}(s)) = (\frac{d}{ds}B(s))C^{-1}(s) + B(s)(\frac{d}{ds}C^{-1}()) = B(s)Y(s)C^{-1}(s) - B(s)Y(s)C^{-1}(S) = 0$

$s_0 \in I$ とする $\forall s \in I[B(s)C^{-1}(s) = B(s_0)C^{-1}(s_0)]$

$A = B(s_0)C^{-1}(s_0)$ とする A は直行行列

$$(A(x_1(s)) - x_2)' = A(x_1'(s)) - x_2' = (\mathbf{t}_2(s_0), \mathbf{n}_2(s_0), \mathbf{b}_2(s_0)) \begin{pmatrix} {}^t\mathbf{t}_1(s_0) \\ {}^t\mathbf{n}_1(s_0) \\ {}^t\mathbf{b}_1(s_0) \end{pmatrix} \mathbf{t}_1(s) - t_2(s)$$

$$= (\mathbf{t}_2(s), \mathbf{n}_2(s), \mathbf{b}_2(s)) \begin{pmatrix} {}^t\mathbf{t}_1(s) \\ {}^t\mathbf{n}_1(s) \\ {}^t\mathbf{b}_1(s) \end{pmatrix} \mathbf{t}_1(s) - t_2(s)$$

$= (\mathbf{t}_2(s), \mathbf{n}_2(s), \mathbf{b}_2(s)) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - t_2(s)$

$=\mathbf{t}_2(s) - \mathbf{t}_2(s) = 0$

よって $(\forall s \in I)[A(x_1(s)) - x_2(s) = -d], \quad d$ は定数

$(\forall s \in I)[x_2(s) = A(x_1(s)) + d]$

T を $x \longmapsto Ax + d$ とすると T は合同変換にであり

$T \circ x_1 = x_2$

(証明終わり)

曲線が縦ベクトルであるとして証明されている。横ベクトルでも同様にできる

コメント:常微分方程式の解の存在、一意性に関する命題を使わないですべて理解できるように工夫した

$\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ をとり、二つの曲線を移す線形変換の表現行列を構成する。

向きをを逆にする時には $B(s) := (\mathbf{t}_1(s), \mathbf{n}_1(s), -\mathbf{b}_1(s))$ とすればよい。

また合同変換 T は一意性も言うことができる、同様にして一般パラメータについても証明が可能である

4.

(1) C^∞ 正則局所局面と C^∞ 局面の定義をかけ

1.C^∞ 正則局所局面であることの定義

$\mathbf{x} : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$は C^∞ 単射な

C^∞ 局所曲面とする

$\mathbf{x}$ が C^∞ 正則局所曲面である:$\Longleftrightarrow (\forall t \in D)[rank\mathbf{Jx}(t) = 2]$

2.C^∞ 局面であることの定義

S が C^∞局面である :$\Longleftrightarrow S \subset (\mathbb{R}^n)$ は C^∞正則局所曲面 $\mathbf{x}_\lambda : D_\lambda \longrightarrow \mathbb{R}^n(\lambda = 1.2....k)$ が存在して $S = x_1(D_1) \cup x_2(D_2) \cup ... \cup x_\lambda(D_\lambda)$ また、各 $x_\lambda(D) \cap x_\mu(D)$

$\neq \phi$ である時 $x_\lambda \circ x_\mu^{-1}$ は C^∞ 級である

(2) 1〜3 のうちで C^∞ 正則局所曲面であるものを選べ

1 $f(x, y) = (x^2 - y^2, x^2 - y^2, x - y),\ (x, y) \in \mathbb{R}^2$

2 $g(x, y) = (x, y, x^2 + y^2),\ (x, y) \in \mathbb{R}^2$

3 $h(x, y) = (x \sin y, y \cos y, x),\ (x, y) \in \mathbb{R} \times (0, 2\pi)$

答え (2)(3)2 はグラフ曲面、3 は回転面といわれるものの一種

3.

3 次元単位球が C^∞ 曲面であることを示せ

proof

$S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R} | x^2+y^2+z^2=1\}$

$S_x^+ := \{(x,y,z) \in \mathbb{R} | x^2+y^2+z^2=1, x>0\}, S_x^- := \{(x,y,z) \in \mathbb{R} | x^2+y^2+z^2=1, x<0\}$

$S_y^+ := \{(x,y,z) \in \mathbb{R} | x^2+y^2+z^2=1, y>0\}, S_y^- := \{(x,y,z) \in \mathbb{R} | x^2+y^2+z^2=1, y<0\}$

$S_z^+ := \{(x,y,z) \in \mathbb{R} | x^2+y^2+z^2=1, z>0\}, S_z^- := \{(x,y,z) \in \mathbb{R} | x^2+y^2+z^2=1, z<0\}$

$D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2+y^2=1\}$ とする、D は連結開集合

$f_x^+ : D \longrightarrow S_x^+, f_x^- : D \longrightarrow S_x^-, f_y^+ : D \longrightarrow S_y^+,$

$f_y^- : D \longrightarrow S_y^-, f_z^+ : D \longrightarrow S_z^+, f_z^- : D \longrightarrow S_z^-$

それぞれ +,-で $(x,y) \longrightarrow (x,y,\sqrt{1-x^2-y^2}),\ (x,y) \longrightarrow (x,y,-\sqrt{1-x^2-y^2})$

それぞれの成分関数はすべて C^∞級関数なので C^∞級写像である

微分係数はそれぞれ$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ 0 & 1 & \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ 0 & 1 & \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \end{pmatrix}$

正則局所曲面であることもわかる

$f_x^+(D) = S_x^+,\ f_x^-(D) = S_x^-,\ f_y^+(D) = S_y^+,$

$f_y^-(D) = S_y^-,\ f_z^+(D) = S_z^+,\ f_z^-(D) = S_z^-$

$S = f_x^+(D) \cup f_x^-(D) \cup f_y^+(D) \cup f_y^-(D) \cup f_z^+(D) \cup f_z^-(D)$

また各座標変換は C^∞ 級である

4.

S を C^∞ 曲面、X を S 上の接ベクトル場をする

X が C^∞ 曲面 S に沿うベクトル場として C^r である $\Longleftrightarrow$X が接ベクトル場として C^r である

proof

C^∞ 曲面とする C^∞ 曲面は C^∞ 正則局所曲面の和集合で表される

各正則局所曲面について接ベクトル場 X の制限が接ベクトル場として C^∞ 級である

ことと S に沿うベクトル場として C^∞ 級であることが同値であることを示せばよいので

C^∞ 正則局所曲面について主張を示せばよい

S を C^∞正則局所曲面,$\mathbf{x} : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ とする

$X = \Sigma_{i=1}^2 X_i \Sigma \mathbf{B}$ と表される

$X = \Sigma_{i=1}^2 X_i \Sigma \mathbf{B} = \Sigma_{j=1}^2 X_i (\frac{\partial x_1}{\partial u_i}, ..., \frac{\partial x_n}{\partial u_i})$

$= (\Sigma_{j=1}^2 X_i \frac{\partial x_1}{\partial u_i}, ..., \Sigma_{j=1}^2 X_i \frac{\partial x_n}{\partial u_i})$

$X \circ x = (\Sigma_{j=1}^2 X(x)_i \frac{\partial x_1}{\partial u_i}(x^{-1}), ..., \Sigma_{j=1}^2 X_i \frac{\partial x_n}{\partial u_i}(x^{-1}))$

x^{-1}と$\frac{\partial x_1}{\partial u_i}$は$C^\infty$である

Xが接ベクトル場としてC^rとすると$X \circ x$は各成分がC^rなので$X \circ x$はC^r

XがSに沿うベクトル場としてC^rとすると$X \circ x$はC^rなので$X \circ x$は各成分がC^r

$x^{-1}, \frac{\partial x_i}{\partial u_j}$は$C^\infty$である から$X_1, X_2$は$C^r$でなければならない

コメント　B が記号的に面倒なので少し省略したところがあることに注意ベクトル場のC^r性はC^r正則曲面とC^r曲面の二つの定義の仕方があることに注意

間違いを訂正しました、間違いがたくさんあって申し訳なかったです。