問 2 (iii)

液面高さの平衡点からの変位を x とし, 濃度の平衡点からのずれを y とおく. $h = h_e + x$, $c = c_e + y$ と置いて状態方程式に代入すると,

$$A\frac{d}{dt}x = q_1 + q_2 - f \tag{13}$$
$$= q_1 + q_2 - S\left(\sqrt{2gh_e} + \frac{g}{\sqrt{2gh_e}}x + \cdots\right), \tag{14}$$
$$= \underbrace{q_1 + q_2 - S\sqrt{2gh_e}}_{=0} - S\sqrt{\frac{g}{2h_e}}x + o(x^2) \tag{15}$$
$$= -S\sqrt{\frac{g}{2h_e}}x + o(x^2) \tag{16}$$
$$A\frac{d}{dt}(c_e + y)(h_e + x) = c_1q_1 + c_2q_2 - (c_e + y)f \tag{17}$$
$$= c_1q_1 + c_2q_2 - S(c_e + y)\left(\sqrt{2gh_e} + \frac{g}{\sqrt{2gh_e}}x + \cdots\right) \tag{18}$$
$$= \underbrace{c_1q_1 + c_2q_2 - c_ef_e}_{=0} - S\frac{g}{\sqrt{2gh_e}}c_ex - f_ey + (\text{微小量の二次以上}) \tag{19}$$
$$= -S\frac{g}{\sqrt{2gh_e}}c_ex - f_ey + (\text{微小量の二次以上}). \tag{20}$$

ただし, $f_e = S\sqrt{2gh_e}$ である. ここで

$$\frac{d}{dt}(xy) = (\text{微小量の二次以上})$$

より, 分子量の変化は

$$A\frac{d}{dt}c_ex + A\frac{d}{dt}h_ey = -S\frac{g}{\sqrt{2gh_e}}c_ex - f_ey + (\text{微小量の二次以上}) \tag{21}$$
$$\Rightarrow Ah_e\frac{d}{dt}y = -f_ey + (\text{微小量の二次以上}) \tag{22}$$

二次以上の項を無視して, 求める線形化方程式は

$$\frac{d}{dt}x = -\frac{S}{A}\sqrt{\frac{g}{2h_e}}x \tag{23}$$
$$\frac{d}{dt}y = -\frac{f_e}{Ah_e}y = -\frac{S}{A}\sqrt{\frac{2g}{h_e}}y \tag{24}$$

となる. 平衡点周りで線形化された方程式は, 状態方程式に定数項が表わせないことに注意.