解答例

問 3

初期状態は全て零であるとする．第 8 回配布資料にあるように，インパルス応答は伝達関数を逆ラプラス変換したものであるから，インパルス応答 $g(t)$, $h(t)$ をそれぞれラプラス変換すると

$$G(s) = \frac{3}{s+1}, \quad H(s) = \frac{2}{s+2} \tag{1}$$

$ys + 2y = 2$

を得る．直列結合すると，

$$G(s)H(s) = \frac{6}{(s+1)(s+2)} = \frac{6}{s+1} - \frac{6}{s+2} \tag{2}$$

を得る．直列結合された系のインパルス応答は，$G(s)H(s)$ の逆ラプラス変換で表わされるので，インパルス応答を $y_I(t)$ で表わすと，

$$y_I(t) = 6e^{-t} - 6e^{-2t} \tag{3}$$

を得る．また，ステップ応答は伝達関数に $\frac{1}{s}$ をかけたものを逆ラプラス変換すればよい．

$$G(s)H(s)\frac{1}{s} = \frac{6}{s(s+1)(s+2)} = \frac{3}{s} - \frac{6}{s+1} + \frac{3}{s+2} \tag{4}$$

初期値 0

ステップ応答を $y_S(t)$ で表わすと，

$$y_S(t) = 3 - 6e^{-t} + 3e^{-2t} \tag{5}$$

を得る．

次に状態方程式を求めよう．入出力関係は，

$$G(s)H(s) = \frac{6}{s^2+3s+2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d^2}{dt^2}y(t) + 3\frac{d}{dt}y(t) + 2y(t) = 6u(t) \tag{6}$$

となる．ここで $x_1(t) = y(t)$, $x_2(t) = \frac{d}{dt}y(t)$ と置くと，状態方程式の一つは

$$\frac{d}{dt}x_1(t) = x_2(t), \tag{7}$$

$$\frac{d}{dt}x_2(t) = -2x_1(t) - 3x_2(t) + 6u(t) \tag{8}$$

である．

状態方程式は無数の表現が可能であり，伝達関数 $G(s)$ のシステムの出力 x_1 を伝達関数 $H(s)$ の入力として表現すれば，

$x_1 = z$
$x_2 = y$

$$\frac{d}{dt}x_1(t) = -x_1(t) + 3u(t), \tag{9}$$

$$\frac{d}{dt}x_2(t) = 2x_1(t) - 2x_2(t) \tag{10}$$

$u - \boxed{G} \overset{z}{-} \boxed{H} - y$