

もまた状態方程式である. ここで $x_2 = y(t)$.

このほかにも, 例えば

$$\frac{d}{dt}z_1(t) = -2z_1 + 6u(t) \quad (11)$$

$$\frac{d}{dt}z_2(t) = -3z_1(t) - z_2(t) + 6u(t) \quad (12)$$

もまた同じ入出力関係を与える状態方程式である. ここで $z_1(t) = y(t) + \frac{d}{dt}y(t)$, $z_2(t) = -y(t) + \frac{d}{dt}y(t)$.

問 4

出力 y の時間微分をとり, 状態変数と $y(t)$, $u(t)$ の関係式を導く.

$$y(t) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} x(t), \quad (13)$$

$$\frac{d}{dt}y(t) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \frac{d}{dt}x(t) = \begin{bmatrix} 129 & -48 \end{bmatrix} x(t) + 3u(t), \quad (14)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) = \begin{bmatrix} 129 & -48 \end{bmatrix} \frac{d}{dt}x(t) + 3\frac{d}{dt}u(t) = \begin{bmatrix} -117 & 54 \end{bmatrix} x(t) + 81u(t) + 3\frac{d}{dt}u(t) \quad (15)$$

ここで $x = (x_1, x_2)^T$ とすると, 式 (13) より $x_2(t) = y(t) - 2x_1(t)$ であるので, 式 (14) に代入すれば,

$$\frac{d}{dt}y(t) = 129x_1(t) - 48(y(t) - 2x_1(t)) + 3u(t) = 225x_1(t) - 48y(t) + 3u(t) \quad (16)$$

より

$$x_1(t) = \frac{1}{225} \left(\frac{d}{dt}y(t) + 48y(t) - 3u(t) \right), \quad (17)$$

$$x_2(t) = y(t) - \frac{2}{225} \left(\frac{d}{dt}y(t) + 48y(t) - 3u(t) \right) \quad (18)$$

を得る. これを式 (15) に代入して,

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}y(t) &= -117x_1(t) + 54(y(t) - 2x_1(t)) + 3\frac{d}{dt}u(t) + 81u(t) \\ &= -\frac{225}{225} \left(\frac{d}{dt}y(t) + 48y(t) - 3u(t) \right) + 54y(t) + 3\frac{d}{dt}u(t) + 81u(t) \\ &= -\frac{d}{dt}y(t) + 6y(t) + 3\frac{d}{dt}u(t) + 84u(t) \end{aligned} \quad (19)$$

となる. 整理して,

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + \frac{d}{dt}y(t) - 6y(t) = 3\frac{d}{dt}u(t) + 84u(t) \quad (20)$$