

## 線形代数学 A 期末テスト

2011年7月26日(火) 10:30から11:50まで

### 注意

- 裏面にも問題があります。
- 解答用紙が2枚以上ある場合は、全ての解答用紙に学生証番号と氏名を記入してください。
- 1問の解答を複数の解答用紙に続けて書く場合は、続きがあることが分かる様にしてください。
- 教科書、ノートの持ち込みは禁止です。

$\mathbb{R}$  を実数全体のなす体,  $\mathbb{C}$  を複素数全体のなす体とする.

また,

$$\mathcal{P}_n(\mathbb{R}) = \{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 \mid a_n, \dots, a_0 \in \mathbb{R}\}$$

を  $n$  次以下の多項式全体のなす  $\mathbb{R}$  上のベクトル空間とする.

① (10点) 方程式

$$z^3 + 8 = 0$$

の全ての根を極座標表示し, ガウス平面に図示しなさい.

② (25点) 数ベクトル空間  $\mathbb{R}^4$  の次の部分集合  $V$  が  $\mathbb{R}^4$  の部分ベクトル空間であることを示し, その基底を一組 (基底であることも示すこと) と次元を求めなさい.

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \right\}$$

③ (10点) 次の主張が正しければ証明し, 間違っていれば反例 (成立しない例) を挙げなさい.

「 $\mathbb{R}^2$  から  $\mathbb{R}^4$  への線形写像  $f$  の像  $\text{Im}(f)$  が上記 ② の  $V$  と一致するとき,  $f$  は単射である。」

4 (20点) 次の主張が正しいければ証明し, 間違っていれば反例 (成立しない例) を挙げなさい.

(1)  $U_1, U_2$  がベクトル空間  $V$  の部分ベクトル空間であれば  $U_1 \cup U_2$  も  $V$  の部分ベクトル空間である.

(2)  $U_1, U_2$  がベクトル空間  $V$  の部分ベクトル空間であれば  $U_1 \cap U_2$  も  $V$  の部分ベクトル空間である.

5 (20点)  $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$  から  $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$  への写像

$$F: p(x) \mapsto (x+1) \frac{dp(x)}{dx} + ax^2 + b, \quad p(x) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$$

が線形写像になるような実数  $a, b$  を求めなさい. (線形写像になる場合もならない場合も, そのことを証明すること.) また, そのような  $a, b$  に対して  $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$  の基底  $\{1, (x-1), (x-1)^2, (x-1)^3\}$  に関する  $F$  の行列表示を求めなさい.

6 (15点) 次の行列の階数を計算しなさい.

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$