B103 岡崎

できれば返して下さい

2010年度前期 自然現象と数学 期末試験 (担当：山本裕)

問題は裏面にもある．すべて解答すること．

1

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を次のように帰納的に定める．

$$a_1 = 0, \qquad a_{n+1} = a_n^2 + \frac{1}{4}.$$

1. 全ての自然数 n について，
$$a_n < \frac{1}{2} \quad \text{かつ} \quad a_n < a_{n+1}$$
であることを示せ．

2. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束することを示し，その極限を求めよ．

2

2階の常微分方程式

$$\ddot{x}(t) + x(t) = 0 \tag{1}$$

を，初期条件

$$x(0) = -1, \quad \dot{x}(0) = 1 \tag{2}$$

のもとで解きたい．次の方針に従って解を求めよ．

1. $x(t)$ が
$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k t^k \tag{3}$$
と展開されていると仮定する．この展開を (1) へ代入することにより，係数 $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ の間に成り立つべき関係式を導け．

2. 1 で導いた関係式を用いて係数 $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ を求めよ．さらに求めた係数を (3) へ代入することにより微分方程式 (1) の解を求めよ．ただし
$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{t^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots,$$
$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$
は仮定してよい．

3

実数 $a \neq 0$ を任意にとる．$\mathbb{R}^3$ における曲面

$$ax^2 + y^2 + z^2 = 1$$

を

$$\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right) = 1$$

の形で表現するような $\mathbb{R}^3$ における内積 $(\cdot,\cdot)$ はどのような場合に存在するか．存在するならばそれを求め，存在しないならばその根拠を述べよ．

4

「自然現象と数学」の講義の感想，及び自然科学や工学における数学の役割等について考えを述べよ．また大学における学問と学習のあるべき姿についての意見を述べよ．