

$$(U_0 \text{ と } U_1 \text{ の共通部分}) = \{a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x \mid a_4 + a_3 + a_2 + a_1 = 0\}$$

基底として $\{x \cdot x^4, x^2 \cdot x^4, x^3 \cdot x^4\}$ が存在する

なぜなら $c_1(x \cdot x^4) + c_2(x^2 \cdot x^4) + c_3(x^3 \cdot x^4) = 0$ のとき

$$c_1 = c_2 = c_3 = 0 \text{ となって}$$

任意の U_0 と U_1 の共通部分の元は

$$a_0(x \cdot x^4) + a_1(x^2 \cdot x^4) + a_2(x^3 \cdot x^4) = a_0x + a_1x^2 + a_2x^3 - (a_1 + a_2 + a_3)x^4$$

から基底の一次結合で書くことができる。

また $P_4(C)$ から任意の元を取ってくると

U_1 から $P_4(C)$ の定数項が同じものを取ってきて、 U_0 から適当な元を取ってきて、その U_1 の元と足し合わせて $P_4(C)$ の任意の元と一致させることができる

よって $P_4(C)$ は $U_0 + U_1$ に含まれて

逆に $U_0 + U_1$ から任意に元を取ってくると、 $P_4(C)$ について各べき乗の係数について何も制約がないので、それは $P_4(C)$ に属する

$$\text{したがって } P_4(C) = U_0 + U_1$$