

$$(U_0 \text{ と } U_1 \text{ の共通部分}) = \{a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x \mid a_4 + a_3 + a_2 + a_1 = 0\}$$

基底として  $\{x \cdot x^4, x^2 \cdot x^4, x^3 \cdot x^4\}$  が存在する

なぜなら  $c_1(x \cdot x^4) + c_2(x^2 \cdot x^4) + c_3(x^3 \cdot x^4) = 0$  のとき

$$c_1 = c_2 = c_3 = 0 \text{ となって}$$

任意の  $U_0$  と  $U_1$  の共通部分の元は

$$a_0(x \cdot x^4) + a_1(x^2 \cdot x^4) + a_2(x^3 \cdot x^4) = a_0x + a_1x^2 + a_2x^3 - (a_1 + a_2 + a_3)x^4$$

から基底の一次結合で書くことができる。

また  $P_4(C)$  から任意の元を取ってくると

$U_1$  から  $P_4(C)$  の定数項が同じものを取ってきて、 $U_0$  から適当な元を取ってきて、その  $U_1$  の元と足し合わせて  $P_4(C)$  の任意の元と一致させることができる

よって  $P_4(C)$  は  $U_0 + U_1$  に含まれて

逆に  $U_0 + U_1$  から任意に元を取ってくると、 $P_4(C)$  について各べき乗の係数について何も制約がないので、それは  $P_4(C)$  に属する

$$\text{したがって } P_4(C) = U_0 + U_1$$