

レポート問題 1

締め切り: 2011年7月11日(月)

1-1 $V = \mathbb{C}^3$, $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$ とするとき,

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in V \mid c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3 = 0 \right\}$$

は V の部分ベクトル空間であることを示せ.

1-2 V を \mathbb{K} 上のベクトル空間とする. このとき U_1, U_2 が V の部分ベクトル空間であれば, $U_1 + U_2$ も V の部分ベクトル空間になることを示せ.

1-3 V を \mathbb{K} 上のベクトル空間とし, U_1, U_2 を V の部分ベクトル空間とする. このとき

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2)$$

が成り立つことを示せ.

1-4 $V = \mathbb{C}^4$ とし, V の部分ベクトル空間 U_1, U_2 を

$$U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \mid a_2 = a_4 = 0 \right\}$$

$$U_2 = \langle S \rangle$$

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

定める. このとき $U_1 \cap U_2$ と $U_1 + U_2$ の基底をそれぞれ一組求めなさい.

1-5

$$\mathcal{P}_4(\mathbb{C}) = \{a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \mid a_4, a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{C}\}$$

を 4 次以下の多項式のなす \mathbb{C} 上のベクトル空間とし,

$$U_0 = \{f(x) \in \mathcal{P}_4(\mathbb{C}) \mid f(0) = 0\}$$

$$U_1 = \{f(x) \in \mathcal{P}_4(\mathbb{C}) \mid f(1) = 0\}$$

とおく. このとき U_0, U_1 が $\mathcal{P}_4(\mathbb{C})$ の部分ベクトル空間になることを示し,

$$U_0 \cap U_1$$

の基底を一組求めなさい. また,

$$\mathcal{P}_4(\mathbb{C}) = U_0 + U_1$$

を示しなさい.