$\boxed{14}$ $X\ (\neq \emptyset)$ を任意の集合とする．X の任意の元 x, y に対して，関数 $d : X \times X \to \boldsymbol{R}$ を

$$\begin{cases} d(x,x) = 0 \\ d(x,y) = 1 \quad (x \neq y) \end{cases}$$

と定義する．

(1) d は X 上の距離関数であることを示せ．

(2) d による点 $a \in X$ の ε-近傍 $N(a;\varepsilon) = \{x \in X | d(a,x) < \varepsilon\}$ はどのような集合か．

(3) d によって定まる距離位相はどのような位相か．

$\boxed{15}$ $(X, \mathfrak{O})$ を位相空間とし，A を X の部分集合とする．このとき，

$$\mathfrak{O}_A = \{A \cap U | U \in \mathfrak{O}\}$$

は $[\mathrm{O}_1], [\mathrm{O}_2], [\mathrm{O}_3]$ を満たすことを示せ．

$\boxed{12}$ の解答

$|f(x) - f(y)| = |d(x,A) - d(y,A)| \leqq d(x,y)$（定理 13.3 (1)）であるから，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\delta = \varepsilon$ とおくと，

$$d(x,y) < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

が成り立つ．よって，$N(x;\delta) \subset f^{-1}(N(f(x);\varepsilon))$ が成り立ち，f は各点 x で連続である．

$\boxed{13}$ の解答

$g(x) = d(x,A) - d(x,B)$ とおくと，

$$|g(x) - g(y)| \leqq |d(x,A) - d(y,A)| + |d(x,B) - d(y,B)| \leqq 2d(x,y)$$

よって，$g(x)$ は (X,d) から $(\boldsymbol{R}, d^{(1)})$ への連続写像である（前問）．よって，集合 U, V を

$$U = \{x \in X | g(x) < 0\} = g^{-1}((-\infty, 0)), \qquad V = \{x \in X | g(x) > 0\} = g^{-1}((0, \infty))$$

で定義すると，$(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$ は $(\boldsymbol{R}, d^{(1)})$ の開集合であるから，U, V は (X,d) の開集合である（定理 14.2 (2)）．明らかに，$U \cap V = \emptyset$ である．

一方，A は閉集合であるから，任意の $a \in A$ に対して，$d(a,A) = 0$（定理 13.3 (2)）．また，$a \in B^c$ で B^c は開集合であるから，a は B^c の内点．よって，$d(a,B) > 0$（定理 13.3 (3)）．したがって，$a \in A$ なら $g(a) = -d(a,B) < 0$ が成り立つ．よって，$a \in U$．これは，$A \subset U$ を意味している．同様に，$B \subset V$ も成り立つ．