

放物運動まで読み進めるとまた見方が変わりそうなので、とりあえずの試論です。

単振り子の周期に関するガリレオ的考察

Q&A サイトでの小学生の質問に端を発して、「単振り子の周期がその長さの平方根に比例する」という事実をガリレオの運動学とその思考過程にならって説明がつかないものかと考えてみた。考察の過程で気づいたガリレオの運動学における「大いなる飛躍」=微積分法への接近と「歴史的制約」=速さ概念の抽象性についても、あわせて視点を当ててみた。

1 小学生の質問にこたえる

ある Q&A サイトに次の質問をみつけた。

「ふりこの長さが $\square \times \square$ 倍が、どうしてふりこの周期 $\square$ 倍なのですか？ 小学生なので、分かりやすく教えてください。」

私が書き込んだ回答は、次のとおりである。

「周期が $\square$ 倍になったところから考えましょう。

今、おもりがある角度まであげてぱっと離します。

(1) 周期が $\square$ 倍になると、同じ角度のところまでふれるのに $\square$ 倍の時間がかかります。

(2) おもりの速さは一番下までおりる間はどんどん速くなっていくので、 $\square$ 倍の時間がかかる長いふりこは、同じ角度までおりると短いふりこ比べて $\square$ 倍の速さになります。すると、長いふりこは同じ角度にあるとき速さはつねに短いものの $\square$ 倍になります。

(3) さて、つねに $\square$ 倍の速さで $\square$ 倍の時間をかけて同じ角度を通過するふりこは、その間 $\square \times \square$ 倍の道のりを動くことになるでしょう。同じ角度でふれて、ふれる道のりが $\square \times \square$ 倍のふりこの長さは、 $\square \times \square$ 倍であることはすぐにわかりますね。

(1) から (3) を逆にたどってみれば、『ふりこの長さ

が $\square \times \square$ 倍になると、ふりこの周期が $\square$ 倍になる』ことがわかるでしょう。」

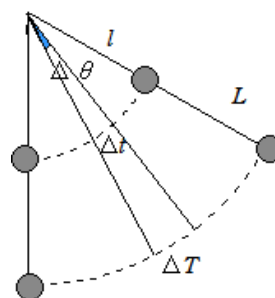
小学生にわかりやすかったかどうかは、まるで自信がない。ただ、こうした高度な質問を寄せる本人の思考能力に期待するのみである。

2 回答の数学的記述

私の回答では、同じ角振幅で振らせた大小の振り子の運動の相似性を自明のものとして用いている。長さ l, L の振り子の周期を $T(l), T(L)$ と書くと、それぞれがある微小角 $\Delta\theta$ を通過する時間 $\Delta t, \Delta T$ について、

$$\frac{\Delta t}{\Delta T} = \frac{T(l)}{T(L)}$$

となるべきことを自明とした。



微小角 $\Delta\theta$ を通過する間の速さの変化をそれぞれ $\Delta v, \Delta V$ とすれば、同じ角度にあるおもりの加速度

a は等しいから,

$$\frac{\Delta v}{\Delta T} = \frac{a \Delta t}{a \Delta T} = \frac{T(l)}{T(L)}$$

が成り立つ。さらに速さは初速ゼロからのこれらの和(積分)だから,

$$\frac{v}{V} = \frac{T(l)}{T(L)}$$

となるであろう。すると、微小角 $\Delta\theta$ に対応する円弧について,

$$\frac{l \Delta\theta}{L \Delta\theta} = \frac{v \Delta t}{V \Delta T} = \left(\frac{T(l)}{T(L)} \right)^2$$

となるから、目的の

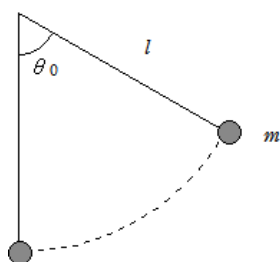
$$\frac{T(l)}{T(L)} = \sqrt{\frac{l}{L}}$$

を得るというわけである。回答ではうやむやにってしまったが、以上は下降時の運動のみの考察であるから、上昇時の運動が下降時と対称であることを本当は付け加えなければならなかった。

それはさておき、上の回答を書いた後で私はふと、自分の回答が何かガリレオ的な思考方法になっっているのではないかと疑ってみた。つまり、単振り子の周期が長さの平方根に比例する事実は、ガリレオの運動学とその思考方法によって説明できるのではないかと考えたのである。

3 運動方程式からの導出

現代的には、もちろん運動の法則から直接周期を求めるのがわかりやすいだろう。エネルギー積分を利用するのが簡明である。今、長さ l の単振り子の角振幅を θ_0 であるものとする、



$$-mgl \cos \theta_0 = \frac{1}{2}mv^2 - mgl \cos \theta$$

$$v = l \frac{d\theta}{dt} = -\sqrt{2gl(\cos \theta - \cos \theta_0)}$$

したがって,

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} T &= - \int_{\theta_0}^0 \frac{l d\theta}{\sqrt{2gl(\cos \theta - \cos \theta_0)}} \\ &= \sqrt{\frac{l}{2g}} \times \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}} \end{aligned}$$

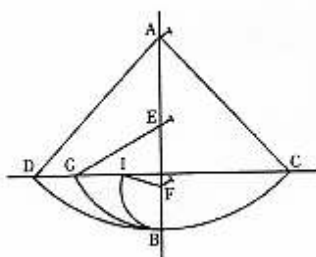
となり、周期が長さの平方根に比例することが証明された。

4 ガリレオ的考察の準備

すでに紹介した Q&A サイトへの回答の論理をガリレオにならってあとづけしてみようと思う。ここで用いるのは、振り子が描く円弧が限りなく微小な斜面の連続であるということである。これはつまりところガリレオの果たしえなかった微積分法を用いることに他ならない。ただ、ガリレオは類似の考え方にかかなり接近しながらも、この直線と曲線の同一視を避けて通ったと思われる表現が「新科学対話」に見られる。たとえばガリレオは、斜面の傾きにかかわらず同じ高さをすべり落ちた物体は等しい「インペトゥス」を得ることの説明として、支点の下方に打った釘に振り子の糸がぶつかってより短い振り子として振れる場合に、釘がない場合と同じ高さまで振れるという実験を紹介しているが、その後にサルヴィアーティに

「サグレードさん、私は、なしうる以上のことを企てようとは思いません。特にここで〔振り子の運動について〕認めたことを、曲面上ではなく平面上でなされる運動に用いようとは思いません。曲面上では、平面上で生じると我々が仮定しているのとは大きく異なる度合で加速が生じるのです。」^[1]

と述べさせ、直線運動と曲線運動の同一視を戒めているのである。もちろん、ここでガリレオのいいなかったことは、始点と終点を同じくする円弧にそう運動と弦にそう運動との明白な違いであり、そこに微小な弦の集合として円弧を見るという発想はなかった。



さて、私たちはガリレオの歴史的制約をのりこえて円弧の微小な斜面への置き換えを認めよう。あとはガリレオが正しく解明した斜面上の「一様加速運動」の法則を使うだけで目的に達する。ここで用いる法則は2つ。すなわち、

- (1) 等しい高さの斜面上で落下の後に物体が獲得する速さは、斜面の傾きに無関係に等しい。
- (2) 斜面上を静止からすべりおりる距離は、時間の2乗に比例する。

以上について、ガリレオが「新科学対話」でまとめている「一様加速運動」の定理または命題との関連で説明しておこう。(1)は、現代的には力学的エネルギー保存に他ならないが、ガリレオはこれを上で触れた振り子の運動からの類推で原理として採用している。物体が受ける重力の斜面方向分力（ガリレオの表現を借りれば「モメントウム」）が重力（「モメントウム全体」）に対してなす比が、斜面の高さがその長さに対してなす比（傾角 θ として $\sin \theta$ ）に等しいということから説明できる可能性を秘めてはいるが、あくまでこれはニュートンの運動法則のレベルであって、ガリレオは薄々感じてはいたにせよそれを原理として活用するにはいたっていないといえるだろう。したがって、これはガリレオにとっては経験の教えるところに従った原理としておかれた仮説である。

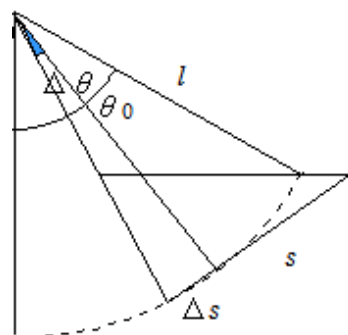
(2)は、「新科学対話」の「自然加速運動」において、定理2（命題2）として述べられているもので、現在でも等加速度直線運動の距離公式としてよく知られている。ガリレオの運動学の中核をなす法則である。

5 ガリレオ的考察を試す

前述のように、振り子の運動を連続した微小斜面上の運動とみなして、その周期が長さの平方根に比

例することを証明する。まず、角振幅 θ_0 で振らした振り子が任意の角変位 θ の位置にきたときに、微小角 $\Delta\theta$ （微小距離 Δs ）を通過する時間 Δt を求めることを考える。用いる仮定を再度あげておこう。

- (1) 等しい高さの斜面上で落下の後に物体が獲得する速さは、斜面の傾きに無関係に等しい。
- (2) 斜面上を静止からすべりおりる距離は、時間の2乗に比例する。



仮定 (1) によれば、角変位 θ におけるおもりの速さは、摩擦のない斜面 s をすべりおりたときの速さに等しい。すると、 Δs を通過する運動は斜面における運動と同じと考えることができる。仮定 (2) により、斜面上の距離 s はすべりおりる時間 t の2乗に比例するから、

$$t = k\sqrt{s}$$

とおける。ここに k は傾角によって決まる比例定数である。すると、 Δs を運動する時間 Δt は、

$$\begin{aligned}\Delta t &= k\sqrt{s + \Delta s} - k\sqrt{s} \\ &= k\sqrt{s}(\sqrt{1 + \Delta s/s} - 1) \\ &\simeq k\sqrt{s} \cdot \frac{\Delta s}{2s} \\ &= \frac{k\Delta s}{2\sqrt{s}}\end{aligned}$$

となる。しかるに、 $\Delta s = l\Delta\theta$ であり、さらに角振幅 θ_0 および角変位 θ が同じならば s は、振り子の長さ l に比例することは明らかである。したがって、

$$\Delta t \propto \sqrt{l}$$

あらゆる変位における微小角 $\Delta\theta$ を通過する時間 Δt の総和が周期 T であるから、

$$T \propto \sqrt{l}$$

が得られた。ただし、ここで上昇する運動部分についての考察は運動の対称性を考慮して省略したこと

を付け加えておく。もちろん，以上の考察は結局のところ先の「回答」と同じものであり，ただ「ガリレオ的」な粉飾を施したにすぎない。

6 「自然加速運動」の論理

前述の考察でも明らかなように，単振り子の周期の考察に当たっては，多少とも微積分法を避けて通ることができない。私の考察においては，円弧を微小な斜面に分割する部分および，微小距離を通過する時間の計算において2次以上の微小量を落とした操作，そしてまたこの微小時間の和をとった操作がそれに当たる。したがって，その意味では以上の考察は「ガリレオ的」とはいえないかもしれない。ただ，前提とした仮定(1)(2)はあくまでガリレオのものである。ここで，あらためて「新科学対話」の「自然加速運動」におけるガリレオの論理を概観してみよう。表式は現代的なものに置き換えることとし，以下 s は斜面上距離， h は高さ， v は速さ， t は落下時間をさし，数字の添字は異なる斜面上の運動における量を表すものとする。

【定 義】 一様加速運動

自由落下および斜面上の抵抗のない落下は，一様加速運動である

$$v \propto t$$

【原 理】 自由落下および斜面上の抵抗のない落下において，同じ高さの落下の後に得られる速さは等しい

【定理1】 静止からある距離を通過する時間は，最終速度の半分で等速運動する時間に等しい（マートン規則）

$$t = \frac{s}{\bar{v}}, \quad \bar{v} = \frac{1}{2}v_{max}$$

【定理2】 落下距離は時間の2乗に比例する

$$s \propto t^2$$

【定理3】 2つの斜面において $h_1 = h_2$ ならば，

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{s_2}{s_1}$$

【定理4】 2つの斜面において $s_1 = s_2$ ならば，

$$\frac{t_2}{t_1} = \sqrt{\frac{h_1}{h_2}}$$

【定理5】 任意の2つの斜面において，

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{s_2}{s_1} \sqrt{\frac{h_1}{h_2}}$$

【定理6】 鉛直にたてた円の最上点または最下点から円周に引いた任意の斜面（弦）上の落下時間は互いに等しい（弦の定理）

最後の【定理6】は有名であるが，位置づけとしては応用問題に当たるといえよう。【定理3～5】は【定理5】に集約されるが，【定理2】に【原理】を適用して得られる。現代的には，斜面の傾角を θ とするとき加速度が，

$$a = g \sin \theta = \frac{gh}{s}$$

となることを

$$s = \frac{1}{2}at^2$$

に適用すればただちに得られる。また，【定理1】およびそれと同値である【定理2】は【定義】から自然に得られるものである。

結局，ガリレオの論理展開は現代的な解釈からすると【原理】と【定義】および【定理2】に集約されるといえるだろう。すなわち，

$$a = g \sin \theta$$

$$v = at$$

$$s = \frac{1}{2}at^2$$

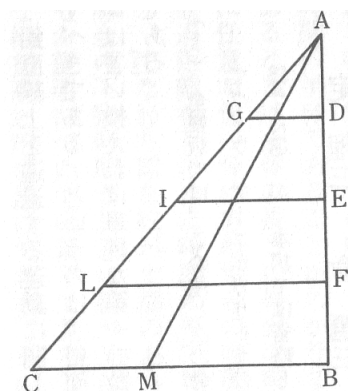
となる。もちろん，こう書いてしまうとガリレオ自らも表明しているように，「新しい科学」への門戸を開いたといえるガリレオの功績の相当な矮小化といわざるを得ない。

7 ガリレオの大いなる飛躍

私が「ガリレオ的考察」と表現したい最たるものは，実は【定理3】を【原理】から証明したくだりにあった。そこには原初的だが微積分法の萌芽が見られるのである。他方でガリレオは【定理1】の証明において，距離を面積に置き換えることなく線分の長さにとどめたことによって，区分求積法に限りなく接近しながら半端で引き返している形跡が見られる。一方【定理3】の証明では，【原理】を適用す

る際に微積分法に足を踏み込む冒険をおかしているのである。このガリレオの大いなる飛躍と私が評したい部分を引いてみよう。以下 AB は鉛直落下の軌跡で、AC は AB と高さを同じくする斜面上の軌跡を表している。《》は私の注釈である。

「それ故、二つの距離 AC、AB は〔両者の対応する《同じ高さの》各点においてそれぞれ〕同一の速さの度合いで通過される《【原理】》。ところで、もし二つの距離が同一の速さの度合いで運動する可動体によって通過されるならば、距離が相互に持つ比は運動時間が相互に持つ比と同一であることが証明されている《ここに微積分法が潜んでいる！》。よって AC 上の運動時間対 AB 上の運動時間は斜面 AC の長さ対鉛直線 AB の長さに等しい。」



この論理はまさに私が Q&A サイトで回答した方法と同じものであった。ここでガリレオは驚いたことに $v\Delta t$ を無意識のうちに積分しているではないか！ガリレオは直後に、登場人物サグレドにこの考察とマートン規則との関連をほのめかさせていいわけをしてはいるが、ここには明らかに数学的には論理の飛躍がある。しかし、私はこの飛躍にむしろガリレオの偉大さを感じている。この飛躍はホイヘンスなどの天才へと引き継がれ、やがてニュートンやライプニッツへと結実したのではなからうか？

8 歴史的制約について

「新科学対話」の運動学には、上のような大いなる飛躍がみられると同時に、ガリレオがかかえたいたしかたのない歴史的な制約というものが横たわっている。特に、私が感じるのは「速さ」概念の抽象性である。「均等運動」はもとより「一様加速運動」においても登場する具体的な速さはマートン規則に代表的に見られる「平均の速さ」であり、「瞬間の速さ」の概念は確かにあるもののやや抽象的な概念にとどまり、思考過程の通過点として現れるのみである。「自然加速運動」においては、【原理】と【定義】、そして【定理1】（マートン規則）に直接速さに関する記述が見られるが、他の定理はいずれも距離と時間に関するものであり、その証明の中で思考手段としてわずかに現れてはいても、運動を評価する量とはなりえていない。この「速さ」の抽象的傾向は「第一日」の自由落下に関する考察の中にも現れているように思われる。

よく知られた斜面の実験で、時間測定の道具が「水時計」であったことを考えれば、無理もないことだろう。「瞬間の速さ」は概念として用いたにしても、測定可能な物理量ではなかったのである。「瞬間の速さ」は微分係数であるから、「速さ」の抽象性はそのまま微積分法への接近を妨げる障害にもなっているだろう。測定技術の進歩と理論的發展との相互作用に関する負の好例といえるかもしれない。むしろ、そうした制約の中でもガリレオがなしたことの大きさに目を向けるべきだろう。

参考文献

[1] ガリレオ・ガリレイ：「新科学論議」

伊藤和行，斎藤憲訳

「人類の知的遺産 31 ガリレオ」（講談社）

伊東俊太郎（代表著者）