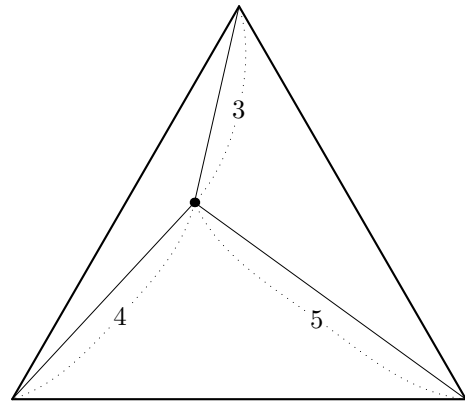


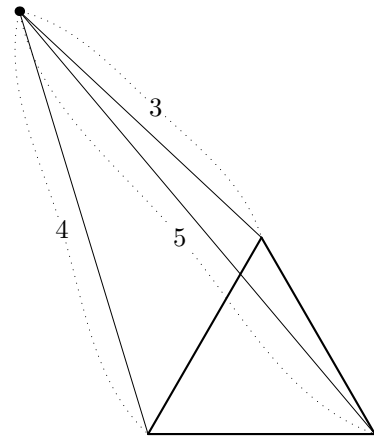
正三角形の面積

図のようにある正三角形の内部に点を取ると、その点から各頂点までの距離が丁度 3, 4, 5 となった。この正三角形の面積を求めなさい。



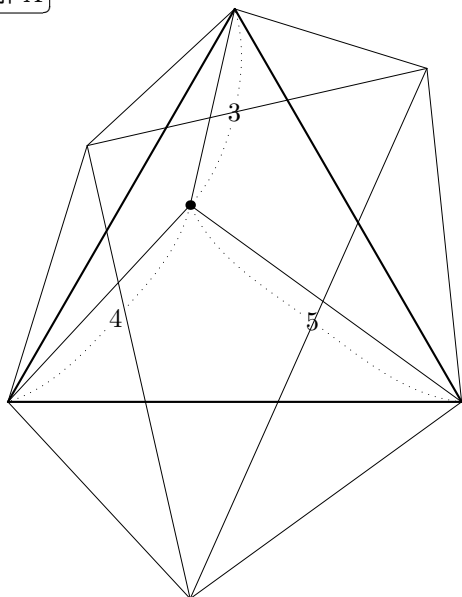
正三角形の面積 (その 2)

図のようにある正三角形の外部に点を取ると、その点から各頂点までの距離が丁度 3, 4, 5 となった。この正三角形の面積を求めなさい。

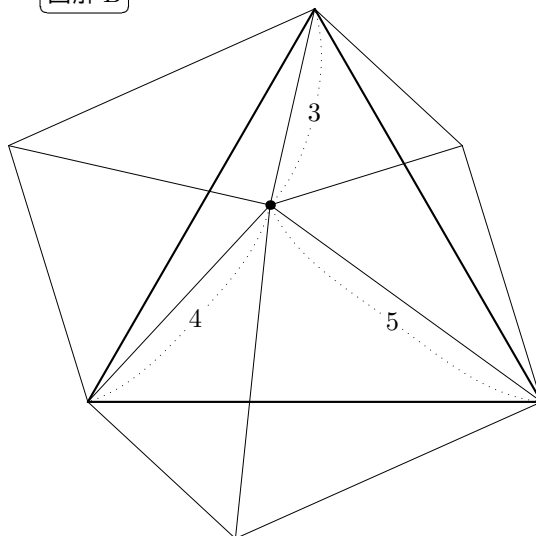


一つ目の問題には、座標平面での計算を用いない初等幾何的に解く方法が色々あります。ここでは解答代わりに2つの簡単なアイデアを紹介しておきましょう。

図解 A



図解 B



図解 A は、正三角形内部の3つの三角形を各辺に関して線対称に移動したものを加えて、面積を考えるアイデア。線対称な三角形を描き加えると、辺の比が3:4:5の大きな直角三角形1つと、 $120^\circ$ の二等辺三角形が3つ（等しい辺の長さが、3, 4, 5のもの）が見えて、それらの面積を合わせると、当然正三角形2つ分になってるねって云う解法。

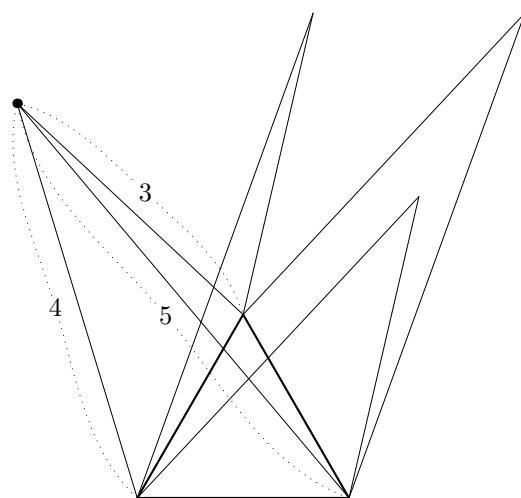
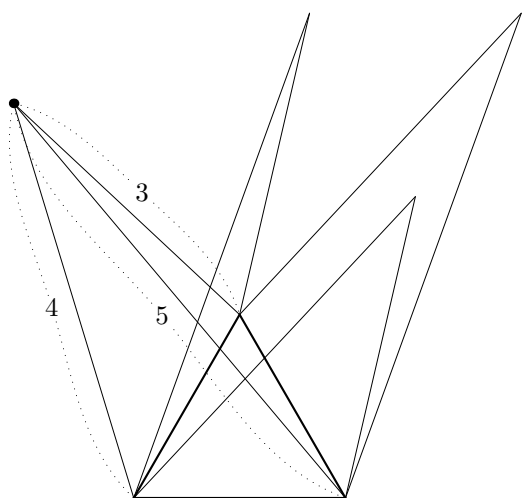
図解 B は、正三角形内部の3つの三角形を各頂点を中心に、時計回り/反時計回りに  $60^\circ$  回転移動したもの（Bの図は反時計回りに  $60^\circ$  回転したもの）を加えて、面積を考えるアイデア。回転移動した3つの三角形を描き加えると、辺の長さが3:4:5の直角三角形が3つと、正三角形3つ（辺の長さが、3, 4, 5のもの）が見えて、それらの面積を合わせると、当然正三角形2つ分になってるねって云う解法。

線対称な図形を描き加える、既存の図形を回転させて描き加える、という手は、良くあるアイデアなので、あまり覚えのない人も、経験がある人も、是非この二通りの解法をなぞり、上手い事やってる感を体験しておこう。

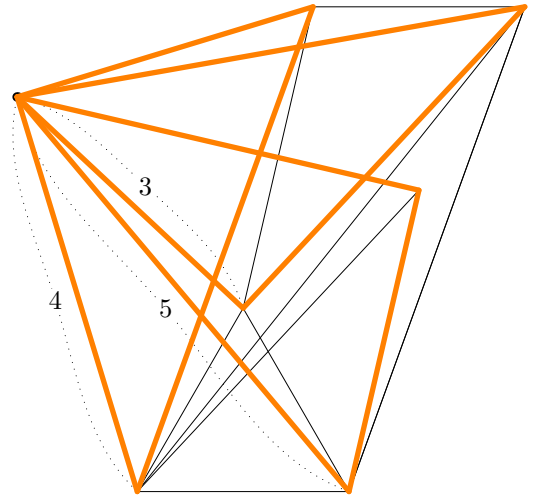
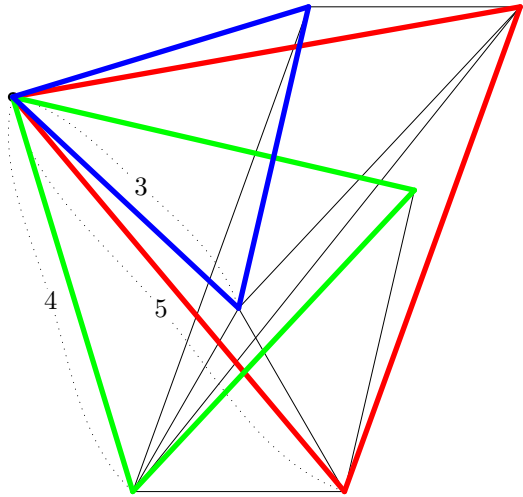
∞

さて、そうなると2つ目の問題も同じように解けないか？と思うのは人情だ。

そこで、図解 B 同様回転させてみた。さて、正三角形と直角三角形は見えるだろうか。



同じ図を二つ並べた。左の図では正三角形を3つ、右の図では直角三角形3つを見つけて、マーカーなどで其れと判るように、なぞってみよう。



このようになったらどうか？さて、そこでこの二つの図をじっと眺めてみる。正三角形の内部に点があった最初の問題と違い、正三角形も直角三角形も二重三重に重なっていて、一寸見た限りでは、面積を知りたい正三角形との関係が見えてこない。

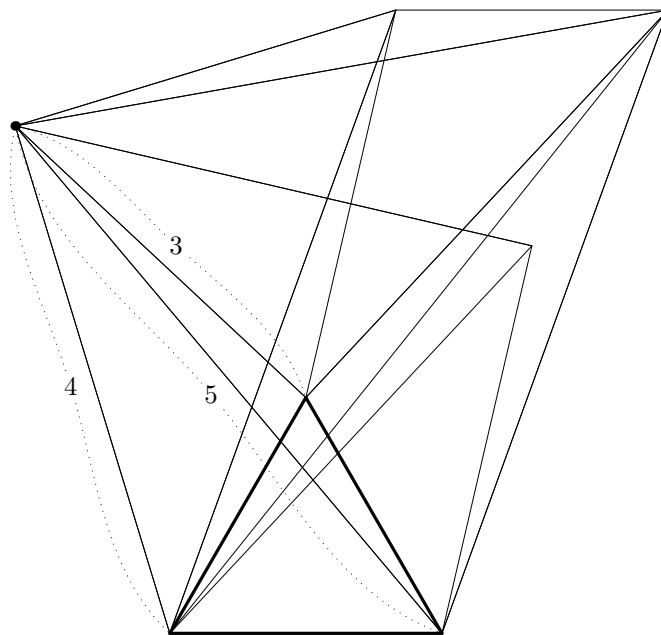
でももう一度最初の問題を振り返ってみれば、3つの正三角形と3つの直角三角形の面積を合わせると、知りたい正三角形の面積の二倍になるという結果だった。

何か関連はないだろうか。

これだけ重なっていて、件の正三角形は小さいのだから、「3つの正三角形と3つの直角三角形の面積の和をとる」というのはあり得ない。

・・・もしかすると「3つの正三角形と3つの直角三角形の面積の差をとれば」よいのではないか。

ちょっと試してみよう。



ってどうすれば試せるのか？って？

それは数える事で解決する。

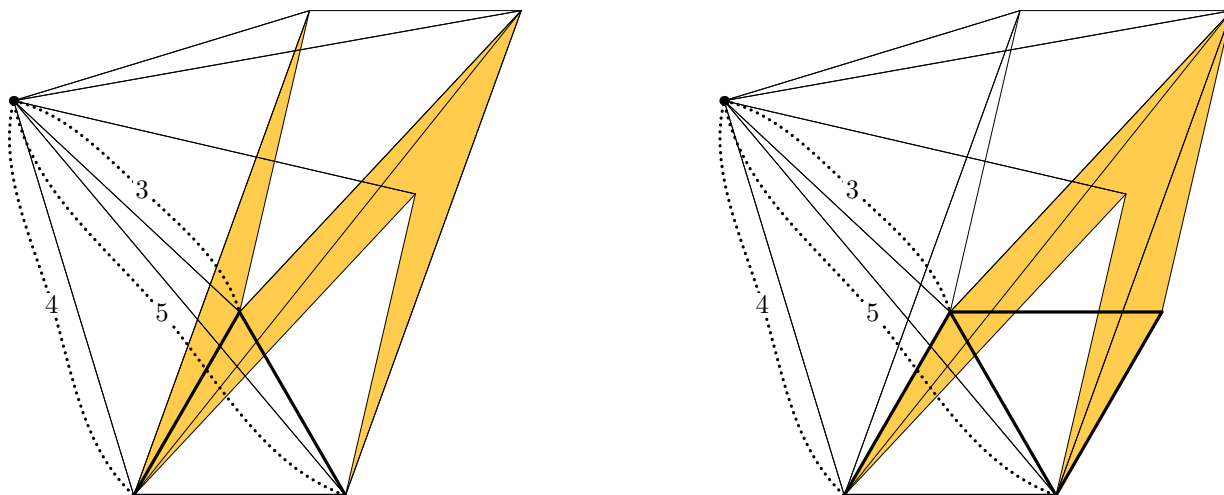
何を数えるのかっていうと、図で線で区切られた三角形・四角形が幾つ重なっていて、いくつ引かれるか、を数えるわけだ。

例えば、三色のペンを用意して数える。まず、3つの正三角形（辺の長さが、3,4,5の奴）の色を決めて（色を変えてなぞると判り易いかも）なぞり、同時にでも後でまとめてでも良いので、その中に入っている区切られた三角形・四角形の中に同じ色の小さい丸を描き込む。

すると複数の正三角形に入っている三角形・四角形の中には、異なる色の小さい丸が並び、2つ重なってるとか3つ重なってるとかが観て判るようになる。

次に3つの直角三角形でも同じことをする。ただし今度は小さな○を描き込むのではなく、小さな○に斜線でも引いて消していく。

そうすると、3つの三角形の面積の和から3つの直角三角形の面積の和を引いた面積を持つ図形が現れる（ややこしい表現だね）。



このZ型の図形の面積が、問題の正三角形の面積の2倍になっていることが確認できれば良い。そこで、Z型の一部を右の図のように移し、問題の正三角形と同じ正三角形を描き加えてみよう。不思議というか当然というか、描き加えた正三角形の辺と、Z型の一部を移した図形の線が（或いは角度が？）重なります。ちょっといい感じかも。

そしてじっと眺める。

そうすると、やったね！ってことになる（はず）。このZ型の面積は確かに問題の正三角形2つ分の平行四辺形の面積と同じじゃないか！ってことに気がつく。

∞

てなわけで、問題の正三角形の面積を  $S$  とすると、

$$2S = \frac{(3^2 + 4^2 + 5^2)\sqrt{3}}{4} - 3 \times \frac{3 \cdot 4}{2}$$

$$2S = \frac{(9 + 16 + 25)\sqrt{3}}{4} - 3 \times 6$$

$$2S = \frac{25\sqrt{3} - 36}{2}$$

$$S = \frac{25\sqrt{3} - 36}{4}$$

となります。一つ目の問題の答えと同じ（ような？）形になっていますね。とても面白い。

∞

どちらの問題も、「各頂点までの距離が丁度 3, 4, 5」のところを「各頂点までの距離が丁度  $a, b, c$ （ただし、 $a, b, c$  は正の数）」として一般的に考えてみる事をお勧めします。

※ 例えば、どんな正数  $a, b, c$  でも「各頂点までの距離が丁度  $a, b, c$ 」となる点が存在するとは限りません。それは何故でしょう。存在しないような具体的な  $a, b, c$  の例は？存在する為の  $a, b, c$  の条件は？というようなことを考える必要に迫られることでしょう。ワクワクするね。