



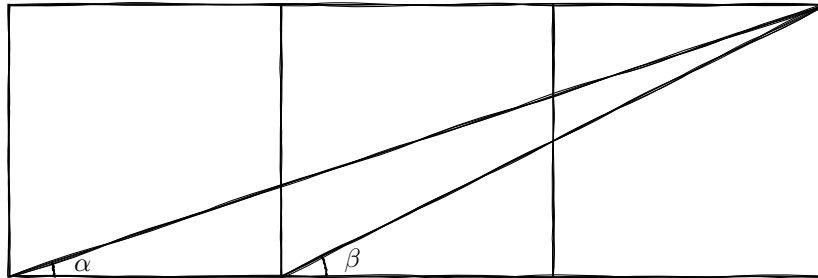
例の角度の問題



もんだい

よくあるパターン。

次の図は正方形を3つ並べた図形です。角 α と β の和を求めなさい。



これは三角関数の言葉を使えば、

$$\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}$$

の値を求めなさいという話になる。

∞

arctan なんて初めて見たという人でも、

$$\arctan 0 = 0 = 0^\circ$$

$$\arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$$

$$\arctan 1 = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$$

$$\arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$$

と幾つか並べてみると、「なんだそんなことか」と思うかもしれない。そう。tan の値から角度を得る tan の逆関数だ。

高校生が学ぶ数学 I で登場する三角比で教わる tan は

$$\tan 30^\circ = \tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\tan 45^\circ = \tan \frac{\pi}{4} = 1$$

$$\tan 60^\circ = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

となっている。

∞

そんなことではなくて、 $\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}$ である。この値については、彼のレオンハルト・オイラーさんが... とか、そのオイラー氏は $\arctan \frac{1}{p+q} + \arctan \frac{q}{p^2+pq+1}$ も計算したのだとある...。がこの手のものではやはり、マチンの式

$$4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239} = ?$$

が有名だ。

∞

ちなみに、Leonhard Euler オイラーさんは 1707 年スイスのバーゼルで生まれた 18 世紀の数学者・天文学者。John Machin ジョン・マチンさんはオイラーさんより少し早い生まれらしい。1680 年頃洗礼とあるだけで生まれた年は分からないのかも。17 世紀末に誕生したことは確か。天文学者。円周率 π を求めるのにとっても強力

な手法というか式を 1706 年に発表し、それを利用して更に円周率を 100 桁まで計算した。マチンはライプニッツとニュートンの微分積分学論争の裁決を行った委員会の一人。21 世紀になっても日本の高校で学ぶ数学の 1 つのゴールとされているのはこの微積分なわけで...

ちなみに 1700 年前後の日本はといえば、江戸時代の中期か。沖方丁さんの「天地明察」で描かれる関孝和や渋川春海が活躍した時代。

∞

さて、最初に揚げた問題が簡単なら、マチンの式だって簡単に判る(答だ)よねって話だ。

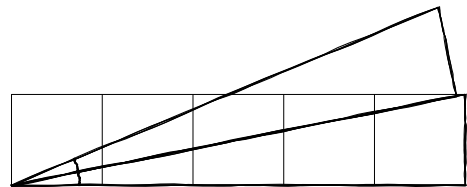
どう分かるのかって? それを観ていこう。

まずは $4 \arctan \frac{1}{5}$ の謎だ。これは tan が $\frac{1}{5}$ になる角 4 つ分ってことだ。図に描くと、



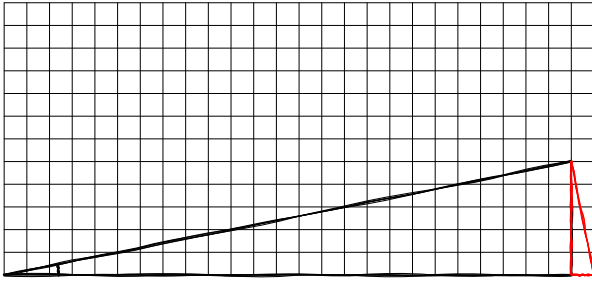
こんな感じの角だ。これを 4 つ分。

いきなり 4 つ分はアレだからまずは 2 つ分を図示してみよう。



ってこれでは... どう描けばよいだろう。そこが冒頭の問題でも問題だったわけだけど。

そこで、このように描いてみた。

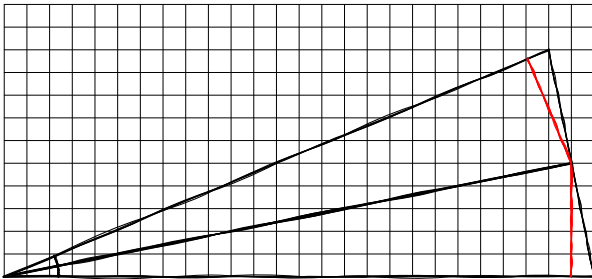


わかるだろうか。

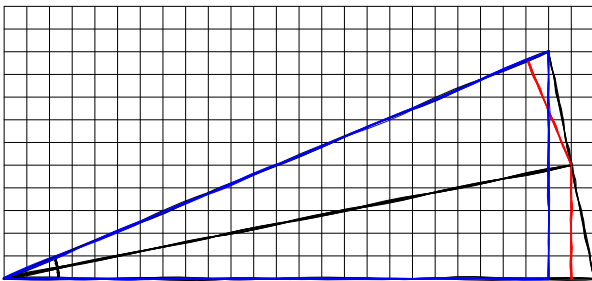
∞

横5縦1の三角形（つまり $\arctan \frac{1}{5}$ の角をもつ直角三角形）を、そのままではなく、5倍の大きさで描いたわけだ。そうすると、右に横1縦5の直角三角形を図のようにつけて、更に一回り大きな $\arctan \frac{1}{5}$ の角をもつ直角三角形を描くことができたわけだ。

そこで、次のように、



線対称にその三角形を描き加えると、図の中に、 $2 \arctan \frac{1}{5}$ の角をもつ直角三角形を具現化できる。



このようにして、 $2 \arctan \frac{1}{5}$ の角を作図することができた。

∞

言い換えれば、

$$2 \arctan \frac{1}{5} = \arctan \frac{10}{24} = \arctan \frac{5}{12}$$

を得たわけだ。

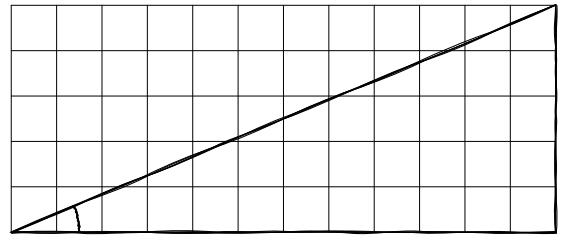
これって... そう。5-12-13 という全部の辺が整数な直角三角形だ。

∞

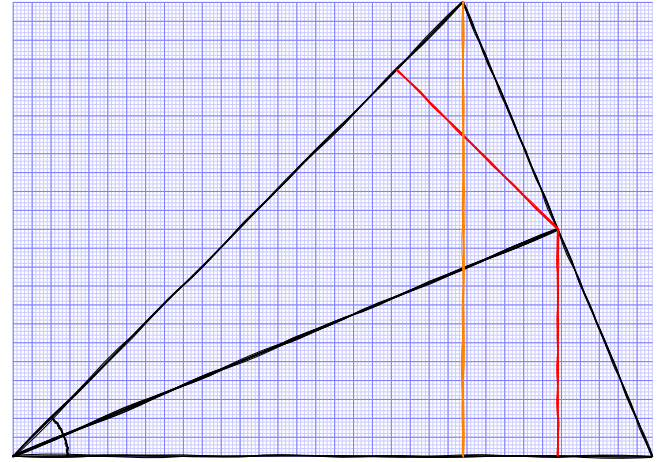
まあそれはおいておいて、同じこと、つまり適当に拡大して、小さな直角三角形を付け足したものを、線対称に変換して描き加える、ということをして、 $2 \arctan \frac{1}{5}$ 、つまり $\arctan \frac{10}{24}$ 、つまりは $\arctan \frac{5}{12}$ の角を持つ直角三角形、つまり、底辺：高さ = 12：5 の直角三角形に対してもう一度行くと、 $4 \arctan \frac{1}{5}$ を作図できるわけだ。

そうすると、マチンの公式が確認できるのではないかな。

図に描くと、



こんな感じの角だ。これを2つ分。今回は底辺：高さ = 12：5 だから、先ず12倍して...

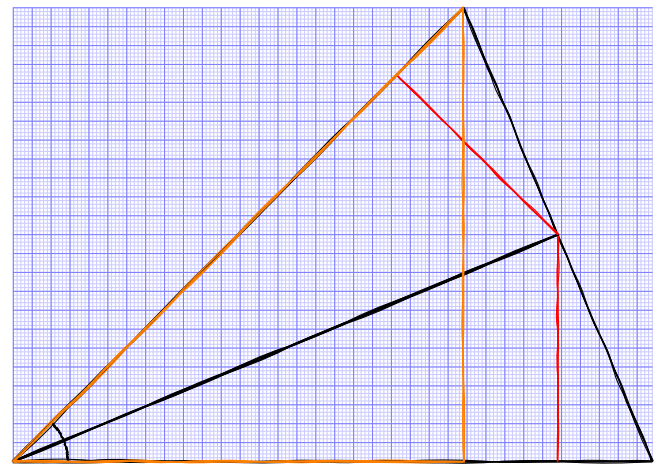


とこうなる。これで長さを数えれば、

$$2 \arctan \frac{5}{12} = \arctan \frac{120}{119} = 4 \arctan \frac{1}{5}$$

が分かる。

ところで、この $\arctan \frac{120}{119}$ の角の直角三角形ってほぼ直角二等辺三角形だよな。つまりほぼ 45° だ。



そして描き直したり数えたりすると分かるが、 $\arctan \frac{120}{119}$ つまり $4 \arctan \frac{1}{5}$ な角は 45° よりもほんの少し大きい。つまり少し引けばぴったり 45° になるわけだ。

∞

では、どのような角を引けばよいのか。少し簡単というか小さな数で考えてみよう。例えば、

$$\arctan \frac{5}{4} - \arctan \frac{\text{ア}}{\text{イ}} = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$$

みたいな問題を解けるか。

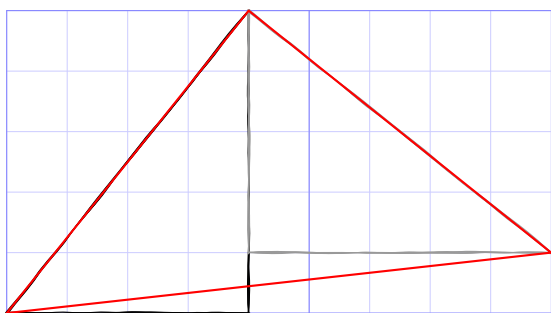
∞

問題は

$$\arctan \frac{5}{4} - \arctan \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}} = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$$

の空欄を埋めることができるか、だ。

それは次のような図が描ければ簡単に解決する問題だ。



もうお分かりだろう。図の中に 45° を特徴とする直角二等辺三角形が鎮座ましまして。

図より

$$\arctan \frac{5}{4} - \arctan \frac{1}{9} = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$$

が分かるというわけだ。

一般的に $b > a$ とすれば、

$$\arctan \frac{b}{a} - \arctan \frac{b-a}{b+a} = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$$

が成り立つ。

∞

つまり、

$$\arctan \frac{120}{119} - \arctan \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$$

$$4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$$

というわけだ。

∞

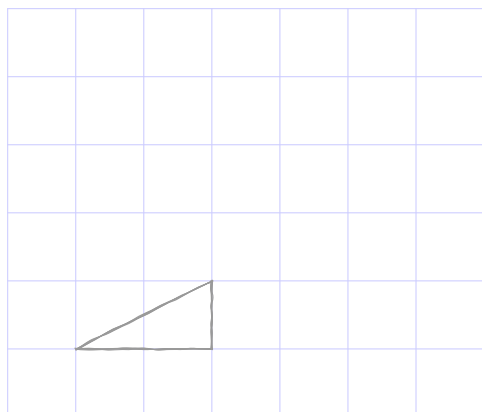
さて、この \arctan を組み合わせると、 45° を作る遊びは余程楽しいようで、いろんな人が結果を残している。

例えば、ヤコブ・ハーマン ^{Jacob Hermann} ¹⁶⁷⁸ _{~1733} は、

$$2 \arctan \frac{1}{2} - \arctan \frac{1}{7} = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$$

と。練習問題に丁度良さそう。

まず、 $2 \arctan \frac{1}{2}$ の図示、



次に、直角二等辺三角形の作図の要領だ。



首尾よく描けたらどうか。そして、

$$2 \arctan \frac{1}{2} - \arctan \frac{1}{7} = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$$

が図から確認できたかどうか。

∞

さて、幾つか試してみることで、だんだんと慣れてきたらどうか。

似たような式はまだある。チャールズ・ハットン ^{Charles Hutton} ¹⁷³⁷ _{~1823} は、

$$3 \arctan \frac{1}{4} + \arctan \frac{5}{99} = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$$

$$2 \arctan \frac{1}{3} + \arctan \frac{1}{7} = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$$

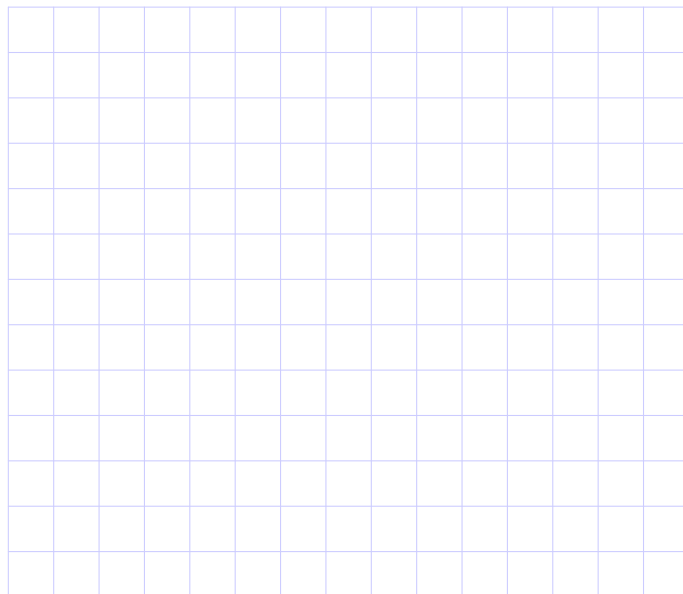
の2つを示したらいい。さてさて、上手く確認できるかな？

∞

2つめの $2 \arctan \frac{1}{3} + \arctan \frac{1}{7} = \frac{\pi}{4}$ については、もう簡単に確認できるだろうと思うので紙面での解説は省略しよう。問題は、1つ目の $3 \arctan \frac{1}{4} + \arctan \frac{5}{99} = \frac{\pi}{4}$ の方だ。2倍の角の作図の手順は確認したから4倍や8倍は面倒でも何とかするが、 $3 \arctan \frac{1}{4}$ ということは3倍の角の図示が必要になりそう。は如何すればよいだろうか。

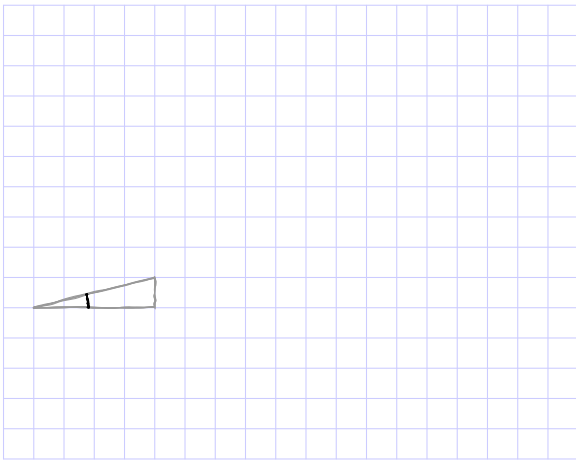
ここでは初登場なので暫し考えてみてほしい。

∞

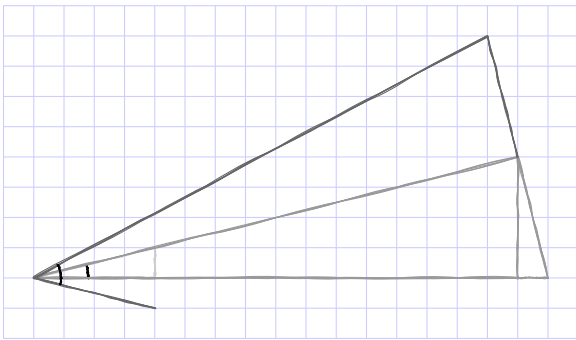


問題は、 $3 \arctan \frac{1}{4} + \arctan \frac{5}{99} = \frac{\pi}{4}$ の確認であり、その為には、 $3 \arctan \frac{1}{4}$ つまり、底辺：高さ = 4：1 の直角三角形の角の3倍の角を具体化する、つまり描いてみるところから始まるのだが・・・2倍の角は描けるわけだから、あとは下に付け加えれば簡単にできそう。

こんな説明でピンとくるだろうか。実際に描いてみよう。



何とかなっただろうか。そう、次の図のような感じで具現化できていれば良いのではないか。



さて、そうなると次は、 45° との差をどう確認するか。これも今までのパターンとは少し違う。

もう少し簡単そうな例で実験してみよう。

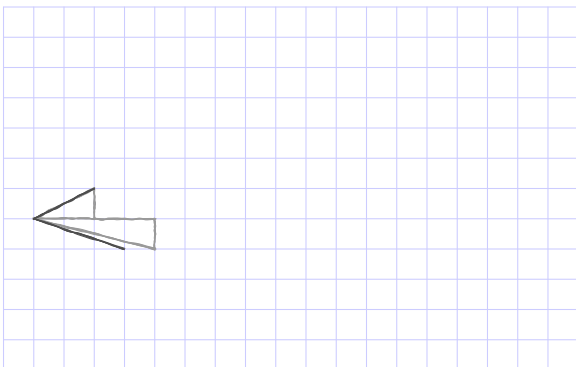
∞

<簡単そうな例> 適当な数で空欄を埋めなさい。

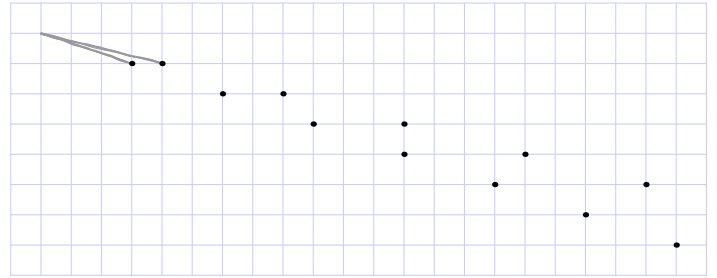
$$\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{4} + \arctan \frac{\text{オ}}{\text{カキ}} = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$$

えっ？って思ったかもう慣れたか、つまり、底辺：高さ = 2：1 の直角三角形の角と 底辺：高さ = 4：1 の直角三角形の角に 底辺：高さ = ： の直角三角形の角を加えると、丁度 45° になるように・・・できる？ っていうパズルだね。

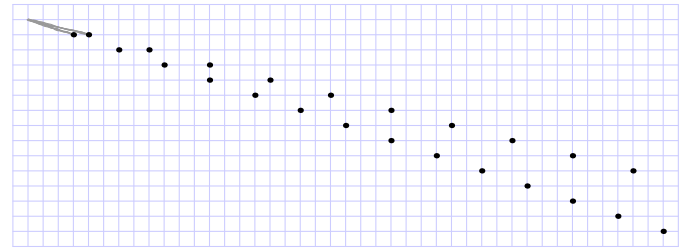
図で描くとこんな感じかな。



この図だと、太い線で 45° を示しているのですが、三角形になってない角（下側の薄い角）を持つ直角三角形が作図できれば解決するけど・・・できるかな？



もう少し拡げて描かないと無いなあ。



よしよし。見つかったね。

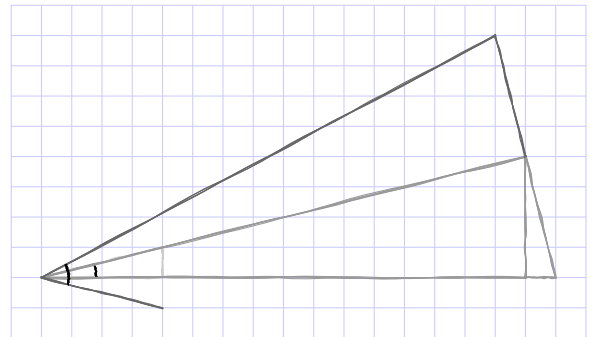
図をよく見て数えれば、底辺：高さ = ： の直角三角形の角だと分かる。つまり、

$$\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{4} + \arctan \frac{1}{13} = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$$

ということだ。

∞

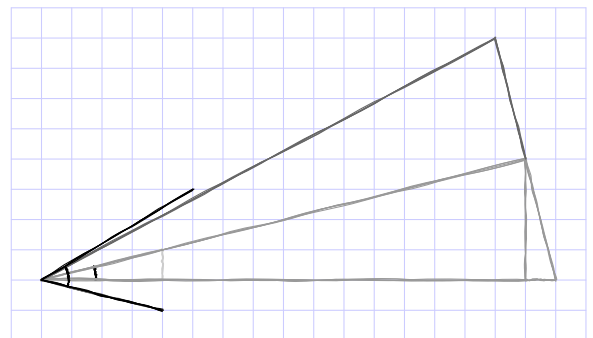
では、元の問題に戻ろう。

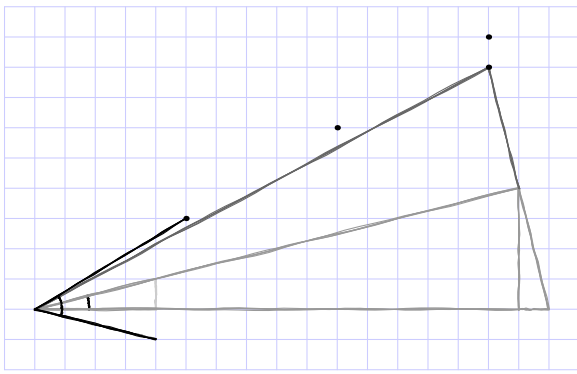


この図を得るところまで来たので、先ほどの問題と同様に式にしてみると、

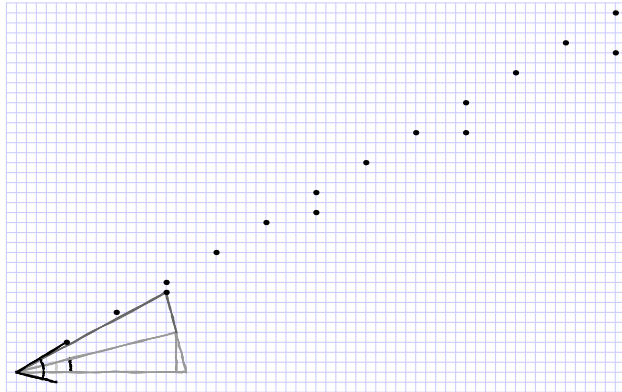
$$\arctan \frac{8}{15} + \arctan \frac{1}{4} + \arctan \frac{\text{カ}}{\text{キク}} = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$$

を解けばよいということか。

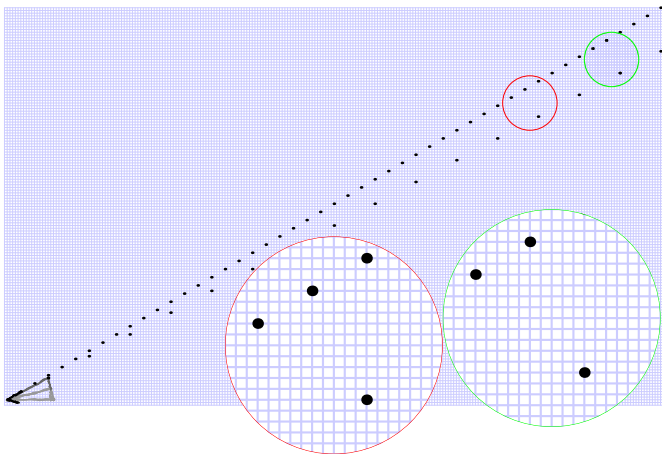




これでは何ともならん。拡げてみよう。



まったく見当たらない...
更に拡大してみよう。



微妙そうなところはあるのやけど... これ以上細かい図を描くのは、機械任せならともかく無理がある。

そうなると計算の出番だ。

∞

でもどうやって計算しよう。

上の図の微妙な2つの例で確認してみよう。

拡大した左の円の4点の場合、それぞれ座標はどうなるだろう。図の左下の $3 \arctan \frac{1}{4}$ の角を描いた点を原点 $(0, 0)$ にとって考えてみよう。

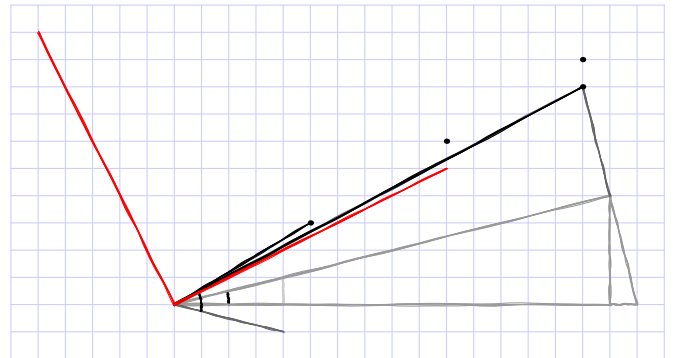
∞

右下の点の座標は、横：縦 = 15 : 8 な直角三角形、つまり $(15, 8)$ という点が基本で、それを13倍したところにあるから、 $(15 \times 13, 8 \times 13) = (195, 104)$ だ。

左上に3つ並んだ点は、横：縦 = 5 : 3 な直角三角形、つまり $(5, 3)$ という点が基本で、それを順に、37, 38, 39倍したところにある。このうち直角三角形になりそうな点は真ん中の38倍した点だ。座標は $(5 \times 38, 3 \times 38) = (190, 114)$ となる。

そうすると、その2点を結ぶ線は、横：縦 = 5 : 10 = 1 : 2 な直角三角形の斜辺だ。横：縦 = 15 : 8 な直角三角形の斜辺や横：縦 = 5 : 3 な直角三角形の斜辺と比べた時に上手く直角にはならない。

図で確認するとこんな感じだ。



惜しいね。

拡大した右の円の3点の場合の確認は任せよう。おそらく惜しいけど上手く直角にはならない筈だ。

∞

では、計算して「上手くいく」点を見つけるためにはどうすればよいだろう。

上で駄目な例を確認したわけだけど、結局のところ、

横：縦 = 15 : 8 な直角三角形、つまり $(15k, 8k)$ と、横：縦 = 5 : 3 な直角三角形、つまり $(5l, 3l)$ という点を基本に、それを l 倍したところにある点 $(5l, 3l)$ で、その2点を繋いでできる横：縦 = $5l - 15k : 8k - 3l$ な直角三角形の斜辺が、横：縦 = 15 : 8 な直角三角形の斜辺か横：縦 = 5 : 3 な直角三角形の斜辺に垂直になればよい。

つまり、横：縦 = $8k - 3l : 5l - 15k = 15 : 8$ or $5 : 3$ となれば良いわけだ。

∞

では解いてみよう。解くのは、

$$8k - 3l : 5l - 15k = 15 : 8$$

と

$$8k - 3l : 5l - 15k = 5 : 3$$

だ。どちらを解いてもよいのなら、下の方が数が小さくて楽そう。

∞

そんなこんなで、

$$8k - 3l : 5l - 15k = 5 : 3$$

を解いてみよう。

$$3(8k - 3l) = 5(5l - 15k)$$

$$24k - 9l = 25l - 75k$$

$$99k = 34l$$

$$k = 34m, l = 99m \quad (m \text{ は整数})$$

ってことだ。

ということはつまり、(15, 8) という点を基本に、それを $k = 34$ 倍したところにある点 $(15 \times 34, 8 \times 34) = (510, 272)$ と (5, 3) という点を基本に、それを $l = 99$ 倍したところにある点 $(5 \times 99, 3 \times 99) = (495, 297)$ を繋げば、横 : 縦 = $510 - 495 : 297 - 272 = 15 : 25 = 3 : 5$ な直角三角形の斜辺が生じて、それは、横 : 縦 = $5 : 3$ な直角三角形の斜辺に垂直になるよという事が分かったわけだ。

そうして、問題であった $3 \arctan \frac{1}{4} + \arctan \frac{5}{99} = \frac{\pi}{4}$ の確認ができた。

えっ? って? なんで $\frac{5}{99}$ だって分かるの? って。そこは肝心なところなので、各自で確認して欲しい。

∞

さて、此処までで判ったことを少し纏めてみると面白いかもしれない。途中で使った

$$\arctan \frac{b}{a} - \arctan \frac{b-a}{b+a} = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$$

のような結果だ。

例えば、

$$2 \arctan \frac{b}{a} = \arctan \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$$

はきっちり決まるのだろうか。などなど。

考えてみると面白いと思う。

∞

さて、此処まで初等幾何学的な、というよりは図形の組み合わせ的な確認方法を観てきましたが、よくよく考えてみれば、座標平面で角度の話となれば、複素数を利用することを忘れては困ります。

例えば冒頭で紹介した

$$\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3} = 45^\circ$$

の場合は、

$$(2+i)(3+i) = 6 + 5i + i^2 = 5(1+i)$$

なので明らかだ、ととても簡単に確認できます。

マチンの公式

$$4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239} = 45^\circ$$

の場合は、

$$\begin{aligned} (5+i)^4 &= (24+10i)^2 = 4(12+5i)^2 \\ &= 4(144-25+120i) = 476+480i \\ &= 2(238+240i) \\ (1+i)(239-i) &= 240+238i \end{aligned}$$

なので明らかだ。となります。

なんというかとても簡単ですね。

∞

ちょっと判らないって。

計算はなんとなく判るけど、だからどう明らかなのかは判らない。

そう。この計算の意味するところを知って「なるほど明らかだ」と分かるためには、基本的な複素数とその計算と座標平面との関係を確認しておく必要があります。

まず複素数は、 $a + b \overset{\text{虚数}}{\overset{\text{実数}}{\overset{\text{実数}}{i}}}$ の形をした数で、虚数単位と呼ばれる i は $i^2 = -1$ とする実数には存在しなかった数とします。

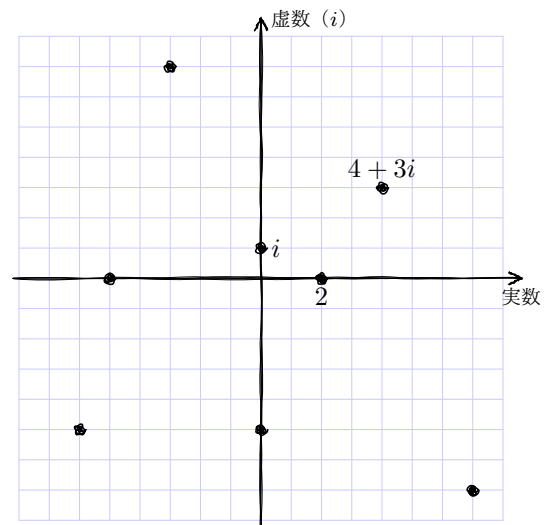
具体的には、 $1+i, 2+3i, 4-\sqrt{5}i, \dots$ のような数を複素数といいます。もちろん、 6 や $-\frac{5}{3}$, $3+\sqrt{2}$ のような普通の数(実数)も含まれますし、 $-i$ や $7i$, $\frac{\sqrt{3}}{2}i$ のように i の付いた虚部のみのも複素数です。

例えば、

$$\begin{aligned} i^2 &= -1, (1+i)(1+i) = 1+2i+i^2 = 1+i^2-1 = 2i \\ 2+3i + 4-5i &= 2+4 + (3-5)i = 6-2i \\ \frac{2+3i}{4-5i} &= \frac{(2+3i) \times (4+5i)}{(4-5i) \times (4+5i)} = \frac{8-15 + 10+12i}{16+25} = \frac{-7+22i}{41} \end{aligned}$$

のように普通に計算ができます。

そして何より、複素数は平面の点に自然に対応します。



複素数が書かれていない点に複素数を描いてみましょう。

これは算数の頃から慣れ親しんできた数直線の複素数版ともいえます。また、座標で (4, 3) と書いていたのを $4+3i$ と書くだけ、ともいえます。それだけなら特にここで紹介する意味がないわけです。

∞

ではここで少し複素数の計算を確認しておきましょう。4 に $1+i$ を何度も掛ける。4 を $1+i$ で何度も割る。そんな練習です。

$$4 \times (1+i) =$$

$$4 \times (1+i)^2 =$$

$$4 \times (1+i)^3 =$$

$$4 \div (1+i) = \frac{4}{1+i} =$$

$$4 \div (1+i)^2 = \frac{4}{(1+i)^2} =$$

$$4 \div (1+i)^3 = \frac{4}{(1+i)^3} =$$

$$4 \div (1+i)^4 = \frac{4}{(1+i)^4} =$$

計算できただろうか。例えばこんな感じだ。

$$4 \times (1+i) = 4 + 4i$$

$$4 \times (1+i)^2 = 4 \times 2i = 8i$$

$$4 \times (1+i)^3 = 8i(1+i) = -8 + 8i$$

$$4 \div (1+i) = \frac{4}{1+i} = \frac{4(1-i)}{2} = 2 - 2i$$

$$4 \div (1+i)^2 = \frac{4}{(1+i)^2} = \frac{2-2i}{1+i} = \frac{-4i}{2} = -2i$$

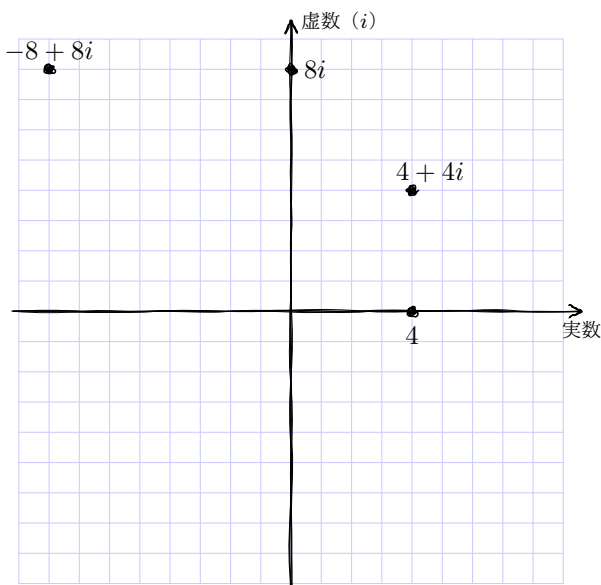
$$4 \div (1+i)^3 = \dots = -1 - i$$

$$4 \div (1+i)^4 = \dots = -1$$

で、それがどうしたのかって話なんだけど、計算だけして放っておくと判らないのだ。

∞

そこで、今の結果を、平面に点で描き込んでいこう。



前半の4から始めて、4に1+iを3回掛けた点まで描き込んでおいた。

割った方はまだなので描き込んでみてほしい。

さて、何かに気が付いただろうか。

∞

4という数があってそれは原点から少し離れた実数軸上にある。これに1+iを掛けると、少し離れた4+iに移り、更に1+iを掛けると、虚数軸上の8iに移り、更に1+iを掛けると、虚数軸の左側の-8+8iに移る。

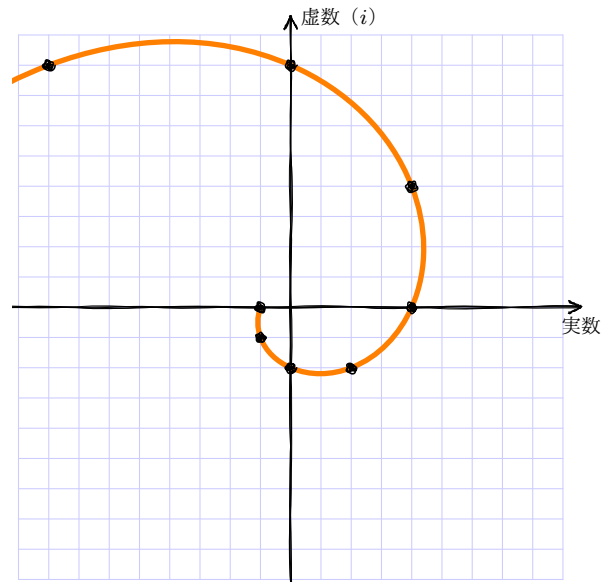
こうやって順に点を追っていくと、どんどん離れながら、原点の周りを左に回っていている事に気がつく。

どう回っているだろうか。

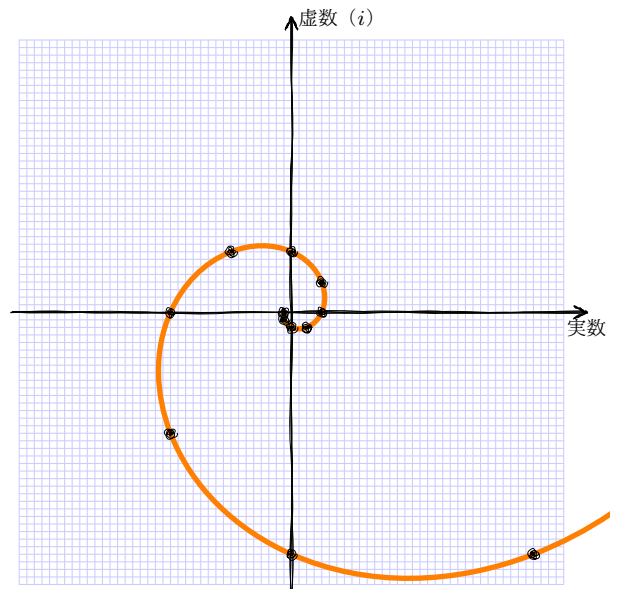
1+iで割ったときにはどうなってるだろう。

∞

これらの点を並べてみたときに、螺旋じゃないかって思った人は素敵だ。よく知っている。



もう少し縮小した図で描いてみると、



あんまり拡がらなかったね。

とまあこんな感じなわけだ。点としての複素数に複素数を掛けると回転するわけだね。

1+iを何度も掛けたり割ったりした今の例だと何度回転しているだろう。その角度って何だろう。

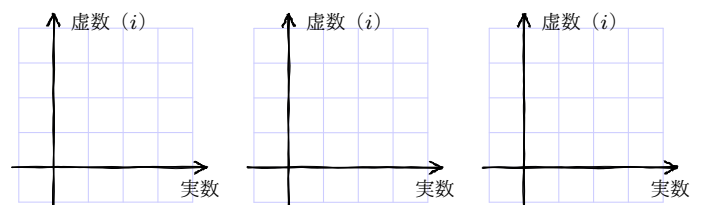
あとはそれが分かればこの話はおしまいだ。

∞

気が付いたかもしれないが、1+iを掛けると丁度45°だけ点の位置が原点を中心に回る。例えば、2+iに1+iを掛けると

$$(2+i)(1+i) = 2 + 3i + i^2 = 1 + 3i$$

だ。やはりこの計算だけではよく判らないと思うが、2+iと1+i, 1+3iを平面上で確認してみると一目瞭然だ。



なぜそうなるのか。

この文書ではそこまでは説明しない。気になる人は各自で調べてみるとよい。

∞

それでは、もう一度、冒頭で紹介した

$$\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3} = 45^\circ$$

を考えてみよう。

$$(2+i)(3+i) = 6 + 5i + i^2 = 5(1+i)$$

の計算でどのように明らかだと確認できるのだろう。

∞

$2+i$ は平面上で、横2 : 縦1 の直角三角形の角、つまり $\arctan \frac{1}{2}$ の角の方向にある。

そして、これに $3+i$ を掛けるということは、この $2+i$ の点を、 $3+i$ の点の角、つまり 横3 : 縦1 の直角三角形の角、つまり $\arctan \frac{1}{3}$ の角だけ回転させることになる。

その結果、 $5(1+i)$ になるわけだが、この $5(1+i)$ は $1+i$ と同じ角 45° の点だ。

つまりそういうことだ。

i が付いてるとどうもって人には、

$$\begin{aligned} (2+i)(3+i)(1-i) &= (6+5i+i^2)(1-i) \\ &= 5(1+i)(1-i) = 10 \end{aligned}$$

と $1-i$ を掛ければ i が消えて 10 だけ残るという見せ方もどうぞ。

つまり、ぴったり 45° になったところで、 -45° 回せば、実軸上に移る。つまり実数になる。

だから何だと云われるかもしれないが、最初の方で紹介した、

$$\arctan \frac{5}{4} - \arctan \frac{\text{ア}}{\text{イ}} = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$$

の空欄を埋める問題なら、 $(4+5i)(x+yi)(1-i)$ が実数になるような x, y を求めるという話になる。

$$\begin{aligned} (4+5i)(x+yi)(1-i) &= (4+5i)(1-i)(x+yi) \\ &= (9 + 1i)(x+yi) \\ &= (9+i)(x+yi) \\ &= 9x - y + (x+9y)i \end{aligned}$$

これが実数になるということは、 $(x+9y)i$ のところがなくなる、つまり $x+9y=0$ となれば良いので、例えば $x=9, y=-1$ とすればよい。

だから、 $9-i$ を掛けることになる。つまり、 $9-i$ の分の角を足すことになるのだけど、 $9-i$ の位置を考えれば、 $9+i$ の角を引くことと同じだ。だから、

$$\arctan \frac{5}{4} - \arctan \frac{1}{9} = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$$

だと分かる。計算だからとても機械的に処理ができるね。

∞

数ページ前で触れた

$$2 \arctan \frac{b}{a} = \arctan \frac{\text{ア}}{\text{イ}}$$

はきっちり決まるのだろうかって話も、複素数使えば考えるまでもなく、

$$(a+bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi$$

だから、

$$2 \arctan \frac{b}{a} = \arctan \frac{2ab}{a^2 - b^2}$$

と分かるし、

$$(a+bi)^3 = a^3 - 3ab^2 + (3a^2b - b^3)i$$

だから、

$$3 \arctan \frac{b}{a} = \arctan \frac{3a^2b - b^3}{a^3 - 3ab^2}$$

など、必要に応じて楽々簡単な道具を^{こしらえる}拵えることができる。

∞

この事が分かれば、直角三角形の組み合わせで苦心して説明した等式達は、どれも複素数の簡単な計算で解決できることになる。

マチンやオイラーの時代に、

$$m \arctan \frac{1}{x} + n \arctan 1y = k \frac{\pi}{4}$$

となるような m, n, x, y, k の組み合わせを探るといふ数学の問題を Gravé という人が問うたみたいで、1897 年には Størmer という人が解決して 1899 年には証明も発表したらしい。今からもう 100 年以上前の話だ。