偏微分（その 2: 線積分）

一般に x, y の関数 $f(x,y), g(x,y)$ について，$f(x,y)dx + g(x,y)dy$ の形の表式を微分 1-形式という．関数 $z(x,y)$ の完全微分

$$dz = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x dy \tag{1}$$

の右辺は微分 1-形式の例である．

xy 平面上の点 A から点 B へ至る区分的に滑らかな有向曲線 C を考える．始点 A，終点 B の座標をそれぞれ $(a, a') = (x_0, y_0), (b, b') = (x_n, y_n)$ とし，曲線 C 上で A から B への行程を細かく n 個に分割する点の座標を $(x_1, y_1), \ldots, (x_{n-1}, y_{n-1})$ とする．（図 1 参照）

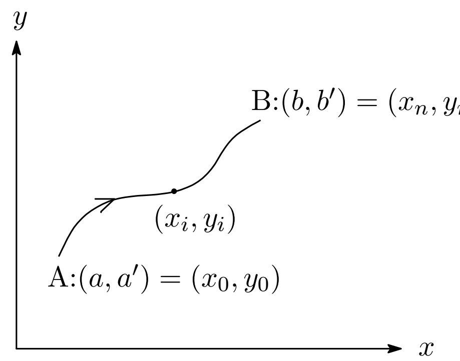

図 1: A から B へ至る曲線 C

分割を細かくする極限を考えることにより，有向曲線 C と微分 1-形式 $fdx + gdy$ から

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \left(f(x_i, y_i)(x_{i+1} - x_i) + g(x_i, y_i)(y_{i+1} - y_i)\right) \tag{2}$$

という値が定まる．これを線積分あるいは単に積分といい，$\int_C (fdx + gdy)$ あるいは $\left(\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} (fdx + gdy)\right)_C$ と記す．曲線 C が $y = y(x)$ と表わされる場合には，(2) の和の各項が形式的に

$$\left(f(x_i, y_i) + g(x_i, y_i)\frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}\right)(x_i - x_{i-1})$$

と書けることから，線積分 $\int_C (fdx + gdy)$ は x の関数の積分

$$\int_a^b \left(f(x, y(x)) + g(x, y(x))\frac{dy}{dx}\right) dx$$

に帰着する．同様に曲線 C が $x = x(y)$ と表わされる場合は

$$\int_C (fdx + gdy) = \int_{a'}^{b'} \left(f(x(y), y)\frac{dx}{dy} + g(x(y), y)\right) dy$$

が成り立つ．曲線 C が媒介変数 s を用いて $x=x(s), y=y(s)$ と表わされる場合は

$$\int_t^{t'}\left(f(x(s),y(s))\frac{dx}{ds}+g(x(s),y(s))\frac{dy}{ds}\right)ds$$

としても計算できる．ただし，$s=t,t'$ は始点 A，終点 B に対応する媒介変数の値である．

有向曲線 C の向きを逆にし，始点と終点を入れ替えたものを C^{-1} と書くと，定義 (2) により

$$\int_C(fdx+gdy)=-\int_{C^{-1}}(fdx+gdy)$$

が成り立つ．また，C の終点 B から点 E に至る有向曲線を D とすると

$$\int_C(fdx+gdy)+\int_D(fdx+gdy)=\int_{DC}(fdx+gdy)$$

が成り立つ．ここで DC は，はじめに C，次に D という合成により点 A から点 B を経て点 E まで至る有向曲線を表わす.

閉曲線に付随する線積分は周回積分と呼ばれ，慣用的にしばしば $\oint(fdx+gdy)$ と記される．これは閉曲線を周回する向きのとり方には ±1 倍の依存性を持つが，曲線上の何処を始点=終点にとるかには依らない．点 A から点 B に至る二つの有向曲線 C, C' について，$C'^{-1}C$ は点 A から C に沿って点 B に行き，そこから C' を逆行して点 A に戻る閉曲線となる．従って上に述べたことから

$$\int_C(fdx+gdy)-\int_{C'}(fdx+gdy)=\oint(fdx+gdy) \tag{3}$$

が成り立つ．ここで，右辺は閉曲線 $C'^{-1}C$ についての周回積分である．

完全微分 (1) は微分 1-形式の例であるが，勝手な微分 1-形式 $fdx+gdy$ が完全微分であるとは限らない．即ち，任意に選んだ関数 $f(x,y), g(x,y)$ について，$(\partial z/\partial x)_y=f, (\partial z/\partial y)_x=g$ を同時に満たすような関数 $z(x,y)$ は存在するとは限らない．微分 1-形式の中で，完全微分を特徴づける条件を与えておく．以下の性質 1)-4) は同値である．

1. $fdx+gdy$ は完全微分，即ち $dz=fdx+gdy$ となる関数 $z(x,y)$ が存在する．
2. $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x=\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_y$.
3. 任意の閉曲線について $\oint(fdx+gdy)=0$.
4. 線積分 $\int_C(fdx+gdy)$ は C の始点と終点のみに依存し，途中の形状に依らない.

性質 3) と 4) が同値であることは (3) から明らかである．性質 1) を認めると $f=(\partial z/\partial x)_y, g=(\partial z/\partial y)_x$ と書ける．これを偏微分の可換性

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \tag{4}$$

に代入すれば性質 2) が得られる．また，性質 2) とグリーンの公式と呼ばれる関数論の定理を用いると性質 3),4) が示される．性質 4) を認めると，xy 平面の各点 P: (x,y) について，固定点 O から P にいたる任意の有効曲線 C に沿った線積分 $\left(\int_{\mathrm{O}}^{\mathrm{P}}(fdx+gdy)\right)_C$ は P だけの関数となる．これを $z(x,y)=z(\mathrm{P})$ と定めると性質 1) を導くことができる．以上のことから 3) $\leftrightarrow$ 4) と 1) $\rightarrow$ 2) $\rightarrow$ 4) $\rightarrow$ 1) が示され，これらの同値性が帰結される．特に 性質 1) の関数 z を用いると，性質 4) の線積分は C の始点 A, 終点 B を用いて $\int_C(fdx+gdy)=z(\mathrm{B})-z(\mathrm{A})$ と書ける．

熱力学では完全微分とは限らない微分 1-形式 $fdx+gdy$ も登場する．これを適当な文字，例えば w を用いて $d'w=fdx+gdy$ などと表記する慣習がある．物理的には無限小の変化量をあらわすので d という記号を使いたいが，何らかの関数 w が存在してその完全微分 dw となっているとは限らない．このことを忘れないためにダッシュを付記した $d'w$ で一つの呼称とするのである．

練習問題

完全微分とはかぎらない微分 1-形式

$$d'w=nx^{n-1}y^m dx+ax^n y^{m-1}dy$$

を考える．ただし $m,n>0$ とする．

(i) xy 面内の原点 $(0,0)$ から $(1,1)$ へ至る曲線 $C: y=x^k$ に沿う線積分 $I=\int_C d'w$ を計算せよ．I は k に依存するか, つまり，始点と終点だけでなく C にも依るか．（$k>0$ とする）

(ii) $d'w$ が完全微分となるための条件を求めよ．

(iii) (ii) の条件が満たされているとき，ある関数 $z(x,y)$ が存在し，$d'w$ は完全微分 dz と等しくなる．このような z を求めよ．

(iv) (ii),(iii) の状況では I は k に依存せず，始点と終点だけから定まり，$I=z(1,1)-z(0,0)$ となることを確認せよ．

解答例

(i) 曲線 $y = x^k$ 上では

$$d'w = nx^{n-1+mk}dx + ax^{n+(m-1)k}kx^{k-1}dx = (n+ak)x^{n+mk-1}dx.$$

よって

$$I = \int_0^1 (n+ak)x^{n+mk-1}dx = \frac{n+ak}{n+mk}.$$

$n \neq 0$ なのでこれは一般には k に依存する．

(ii) $f = nx^{n-1}y^m$, $g = ax^n y^{m-1}$ とおき，完全微分の条件として性質 2) を課すと $a = m$.

(iii) $a = m$ のとき

$$d'w = nx^{n-1}y^m dx + mx^n y^{m-1}dy = d(x^n y^m)$$

よって $z(x,y) = x^n y^m + \text{定数}$ ととれる．

(iv) $a = m$ のとき (i) で $I = 1$ となり，k に依らなくなる．この値は

$$z(1,1) - z(0,0) = 1^n 1^m - 0^n 0^m = 1$$

に一致している．