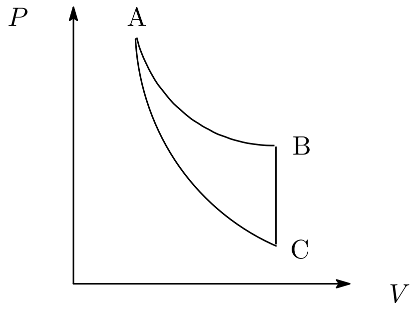
熱機関の効率とカルノー定理

図のような2温度機関を考える．



(1) A$\longrightarrow$ B: 温度 T_1 で準静的等温膨張
(2) B$\longrightarrow$ C: 温度 $T_2(< T_1)$ の低熱源に接触させる定積過程
(3) C$\longrightarrow$ A: 準静的断熱圧縮

作業物質は N モル理想気体とする．

(i) このサイクルは可逆か？
(ii) 効率 η を T_1, T_2 で表せ．
(iii) 効率 η が，同じ T_1, T_2 の間に働くカルノーサイクルの効率より小さいことを証明せよ．

解答例

(i) もし過程 B $\longrightarrow$ C が可逆であるとすると，クラウジウスの原理に反する．よって不可逆サイクルである．(この過程の途中は平衡状態にないので，PV 図上にあらわされる点（平衡状態）を通過していくような印象を与えるこの図はあまり好ましいものではない.）

(ii) 高熱源 T_1 から熱を吸収しているのは A $\longrightarrow$ B の過程である．理想気体の内部エネルギーは等温過程では一定なので，第一法則により吸収した熱 Q_1 は外にした仕事に等しい．その値は

$$Q_1 = \int_{V_A}^{V_B} PdV = \int_{V_A}^{V_B} \frac{NRT_1}{V} dV = NRT_1 \log \frac{V_B}{V_A} \tag{1}$$

と計算される．ここで，断熱曲線 (AC) 上では $TV^{\gamma-1} =$ 一定（ポアソンの式）であったことを思いだすと

$$T_1 V_A^{\gamma-1} = T_2 V_C^{\gamma-1} = T_2 V_B^{\gamma-1}$$

であるので，(1) は次のように書ける．(log は自然対数)

$$Q_1 = \frac{NRT_1}{\gamma - 1} \log \frac{T_1}{T_2}. \tag{2}$$

次に低熱源 T_2 に放出する熱 Q_2 を求めよう．熱放出をおこなっているのは B $\longrightarrow$ C の過程である．この間仕事はしないので，第一法則により Q_2 は内部エネルギーの減少分に等しい．N モル理想気体の内部エネルギーは定積モル比熱 c_V を用いて $U = Nc_V T$ であった．従って

$$Q_2 = Nc_V(T_1 - T_2).$$

以上により効率は

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_1 - T_2}{T_1 \log \frac{T_1}{T_2}} \tag{3}$$

となる．ただしここで $\gamma(= c_P/c_V) = 1 + R/c_V$ （マイヤーの関係式）を用いた．この結果はモル数 N や γ の値にはよらない.

(iii) カルノー効率は $\eta_C = 1 - T_2/T_1$ であった．これと (3) から，示すべき式 $\eta < \eta_C$ は次の不等式に同値である.

$$\log \frac{T_1}{T_2} < \frac{T_1}{T_2} - 1 \quad \text{for any } 0 < T_2 < T_1. \tag{4}$$

これの証明は熱力学ではなく算数.(でもきちんとやっておくと，カルノーの定理が胸にじ〜んとくる.）たとえば $x = T_1/T_2$ とおき， $x \geq 1$ において $f(x) = \log x - x + 1$ で定義される関数 $f(x)$ を考える．$f(1) = 0$ と $f'(x) = x^{-1} - 1 \leq 0$ から $f(x) < 0$ (for $x > 1$) が示された.（証了）