

量子と古典の物理と幾何学
2016年4月29-30日

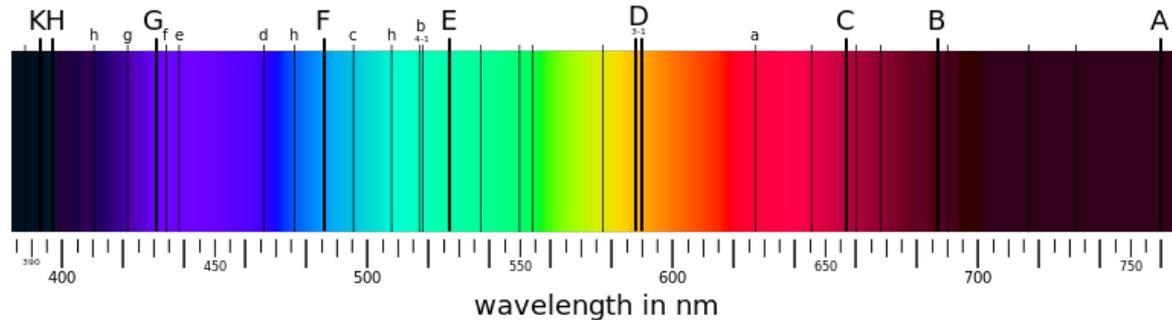
不確定性関係の厳密化と多様化

谷村 省吾

名古屋大学大学院情報科学研究科

量子論の歩み 1/10

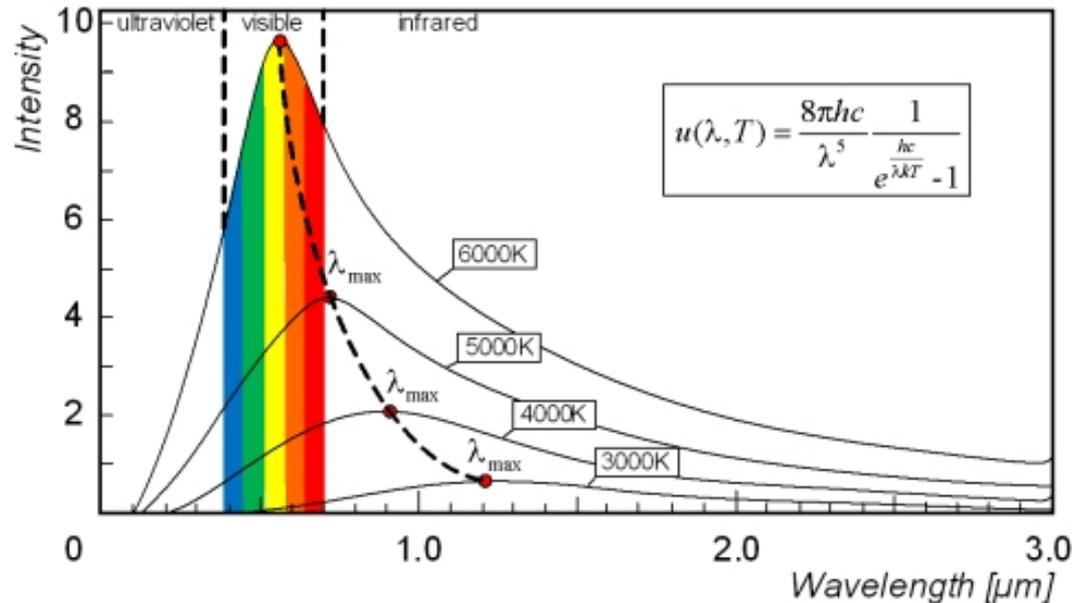
- Wollaston (1802) 太陽光のスペクトルに暗線を発見



- Fraunhofer (1814) 太陽光の暗線を570本以上発見
https://en.wikipedia.org/wiki/Fraunhofer_lines
- Kirchhoff, Bunsen(1860) 炎色反応から分光学.
太陽光の暗線が太陽大気原子による光吸収で生じると唱えた. Kirchhoffの法則(放射率と吸収率が等しいこと), 黒体放射の普遍性.

量子論の歩み 2/10

- Wien (1893) 温度と波長の関係
- Planck (1900) 黒体放射の公式



<http://postreh.com/vmichal/thesis/figures/figures.htm>

- Einstein (1905) 光量子仮説

$$E = h\nu$$



https://en.wikipedia.org/wiki/Wien's_displacement_law

量子論の歩み 3/10



- Balmer (1885) 水素原子のスペクトル公式

https://en.wikipedia.org/wiki/Johann_Jakob_Balmer

$$\lambda = \frac{Bn^2}{n^2 - 4} \quad (n = 3, 4, 5, 6, \dots)$$

当時知られていたデータ

$$\lambda = 6562.10, \\ 4860.74, \\ 4340.10, \\ 4101.20 \times 10^{-10} \text{m}$$

- Rydberg (1890)

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{4}{B} \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

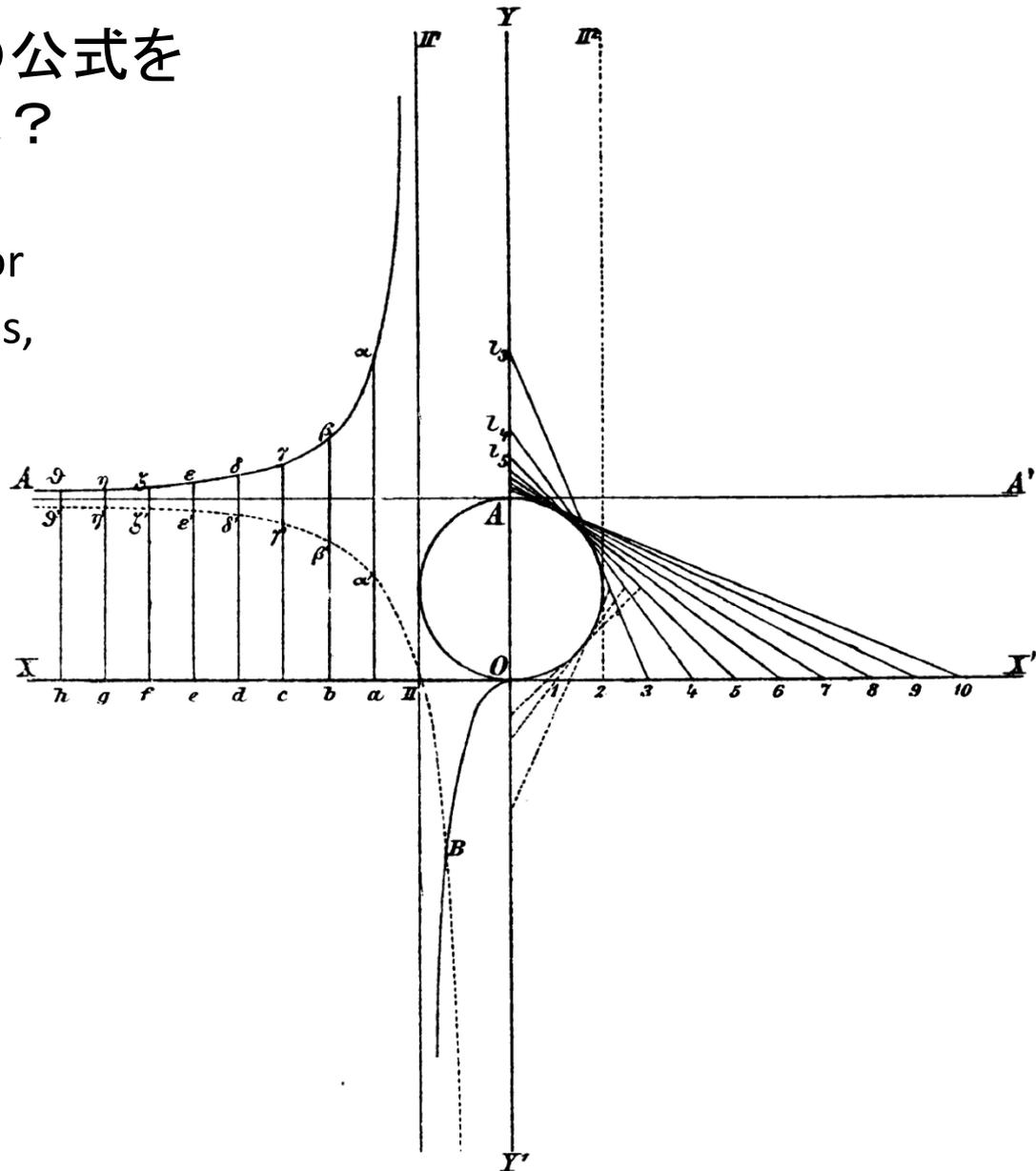
- Rutherford (1911) 有核原子模型
- Bohr (1913) 水素原子のエネルギーの量子化

$$L_n = \hbar n, \quad E_n = -\frac{me^4}{2\hbar^2 n^2}, \quad E_n - E_m = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

バルマーはどうやってこの公式を
見つけたのでしょうか？

Balmer (1897): A new formula for
the wave-lengths of spectral lines,
Astrophysical Journal, Vol. 5,
pp.199-209

$$\lambda = \frac{a(n + c)^2}{(n + c)^2 - b}$$



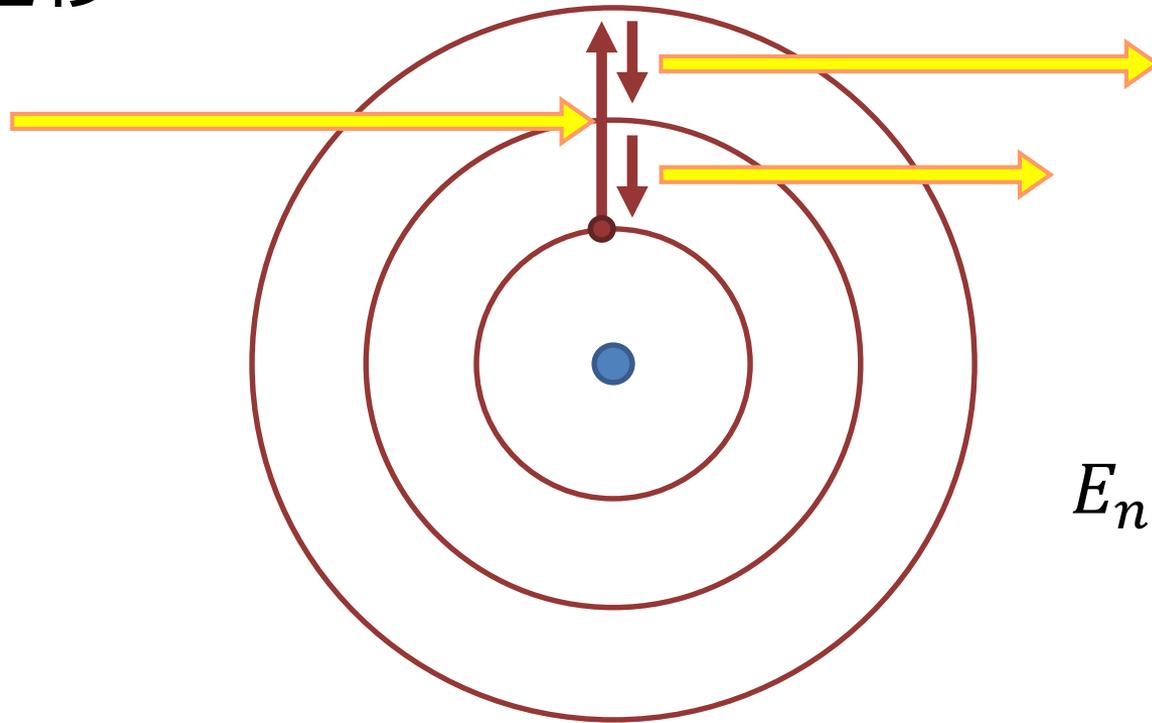
$a \ \beta \ \gamma \ \delta \ \epsilon \ \zeta \ \eta \ \theta$: Curve of Wave-lengths.
 $a' \ \beta' \ \gamma' \ \delta' \ \epsilon' \ \zeta' \ \eta' \ \theta'$: Curve of Reciprocals.



量子論の歩み 4/10

- Bohrによる概念整理:

定常状態, 量子条件, 量子数, エネルギー準位,
遷移



$$E_n - E_m = h\nu$$

量子論の歩み 5/10

- Heisenberg, Born, Jordan (1925-26) 行列力学

$$\hat{Q} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \cdots \\ Q_{21} & Q_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad \hat{P} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots \\ P_{21} & P_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$
$$[\hat{Q}, \hat{P}] = i\hbar \hat{1}$$

- Dirac (1925) 非可換代数に基づく量子力学

$$[\hat{A}, \hat{B}] = i\hbar \widehat{\{A, B\}_P}$$

- Schrödinger (1926) 波動方程式の固有値としてのエネルギー準位
- Born (1926) 波動関数の確率解釈 $|\psi(x)|^2$

量子論の歩み 6/10

- 当時の古参の物理学者たちの受け止め方:

Heisenbergたちの行列力学はわかりにくい。行列の数学に不慣れだった。粒子の位置や運動量を表す行列というものをどう解釈したらよいか、わからなかった。

Schrödingerの波動方程式はわかりやすい。連続・微分可能な波動関数にもとづく理論なら、不連続な量子遷移という概念を消し去ってくれるのではないかという期待があった。

量子論の歩み 7/10

- 焦るHeisenberg
 - 師匠であるBornが波動関数の確率解釈を唱えて、波動力学の人気に弾みをつけた。
 - 水素原子のスペクトルはPauliが行列力学を使って計算したが、他の問題を行列力学で解くのは大変。
 - Schrödinger, Dirac, Jordan が行列力学と波動力学とが等価であることを証明した。
- そこで、Bohrに相談するが、
 - BohrはSchrödingerを説得。
 - Bohr自身は相補性という考えが気に入っていた。



量子論の歩み 8/10

- EinsteinとHeisenbergの会話(現代語らしくなるように改作):
 - E: 物理学の理論は観測可能量だけを扱うという話を本気で信じてはいけません.
 - H: あなたこそ, そういう考えを基礎にして相対論を作ったのではないですか?
 - E: 私はそういう考え方をしたこともあります. 実際に我々が何を観測できるか思い出すことは発見の手順としては価値のあることかもしれませんが, 原理的な観点からは, 観測可能な量だけをもとに理論を作ろうとするのは間違っています. 実際はその逆です. 理論があってはじめて人が何を観測できるか決まるのです.

量子論の歩み 9/10

- Heisenbergの考えの道筋

- 現実には霧箱のような測定器で電子やアルファ粒子の軌跡は見える.
- 電子そのものというよりは, 電子によってイオン化された空気の分子がたねになって生じた霧つぶが見えている.
- 原子の中を動いている電子の軌道は, 現実には見えない.
- 電子の位置と運動量の測定精度には理論から決まる限界があるのではないか?



<http://f.hatena.ne.jp/initialstar/20110601120304>

動画へのリンク: <http://chigaku.ed.gifu-u.ac.jp/chigakuhp/html/kyo/busshitsu/kirib/>

量子論の歩み 10/10

- Heisenberg, 不確定性関係を発見 (1927)
 - 運動量と位置の不確定性関係 $p_1 q_1 \sim h$
 - ガウス型波動関数の場合に成立することを確かめた.
 - いくつかの思考実験で成立することを確かめた.
 - エネルギーと時間の不確定性関係 $E_1 t_1 \sim h$
も思考実験から導いた.
- しかし, 「不確定性」の定義は曖昧であり, 不確定性関係の証明は後回しにされた. そのことが後々に混乱を生み出すもとになった.

今日の話

- いままでになされてた不確定性関係の数学的定式化を概観する.
- いまだに異論の多い, 時間とエネルギーの不確定性関係について, Heisenbergのオリジナルの思考実験と, 最近, 私が考えている定式化を解説する.

ここから別のノートで解説

『多様化する不確定性関係』

<http://www.phys.cs.is.nagoya-u.ac.jp/~tanimura/uncertainty/note.html>

時間とエネルギーの不確定性関係を いかにして厳密に定式化するか

Kennard, Robertson, 小澤などが位置と運動量やその他の物理量の不確定性関係を厳密に定式化したように, 時間とエネルギーの不確定性関係も厳密かつ普遍的に成立するように定式化したい.

Heisenbergの思考実験の定式化

- Stern-Gerlachの実験のハミルトアニン

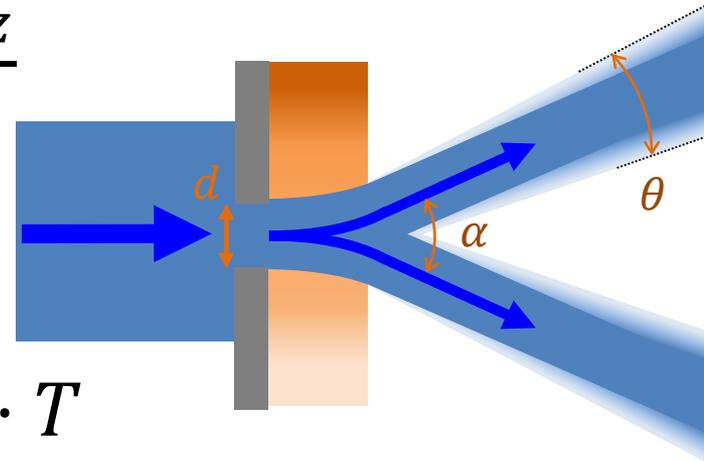
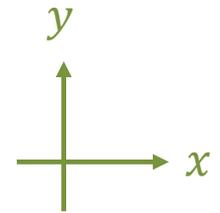
$$\hat{H} = \frac{1}{2m} (\hat{p}_x + \hat{p}_y) - \mu \hat{S}_z B_z(\hat{y})$$

- 運動方程式

$$\frac{d\hat{p}_y}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{p}_y, \hat{H}] = \mu \hat{S}_z \frac{\partial B_z}{\partial \hat{y}}$$

- 分解能に対する要請

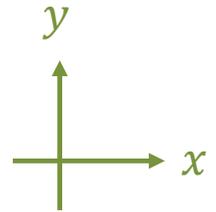
$$\sigma(\hat{p}_y) < \left| \frac{d\hat{p}_y}{dt} \right| \cdot T = \mu \left| \frac{\partial B_z}{\partial \hat{y}} \right| \cdot T$$



Heisenbergの思考実験の定式化

分解能に対する要請とKennardの不等式より

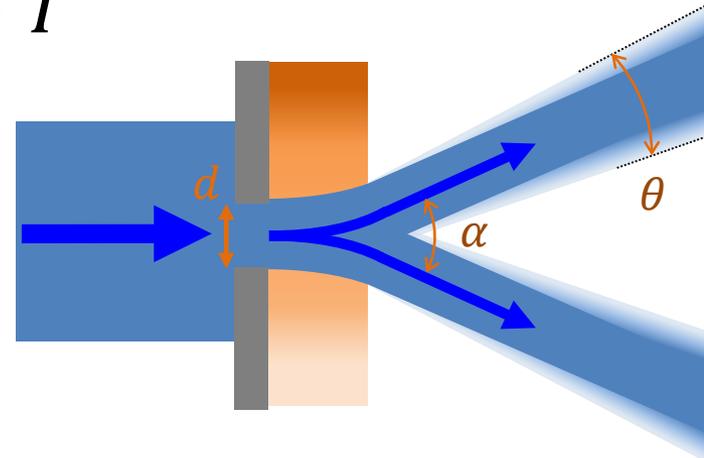
$$\sigma(\hat{p}_y) < \left| \frac{d\hat{p}_y}{dt} \right| \cdot T = \mu \left| \frac{\partial B_z}{\partial \hat{y}} \right| \cdot T$$



$$\frac{\hbar}{2} \leq \sigma(\hat{y})\sigma(\hat{p}_y) < \mu \left| \frac{\partial B_z}{\partial \hat{y}} \right| \sigma(\hat{y}) \cdot T$$

$$\Delta E := \mu \left| \frac{\partial B_z}{\partial \hat{y}} \right| \sigma(\hat{y})$$

$$\therefore \frac{\hbar}{2} < \Delta E \cdot T$$



Heisenbergの ΔE は何？

- これは, \hat{p}_y をメーターとして \hat{S}_z を測る実験であり,
 $[\hat{H}, \hat{S}_z] = 0$
- スピンアップとダウンのエネルギー差は
$$\mu B_z(\hat{y})$$
- 位置のばらつきがあるためにエネルギー差にもばらつきが生じる:

$$\Delta E = \mu \left| \frac{\partial B_z}{\partial \hat{y}} \right| \sigma(\hat{y})$$

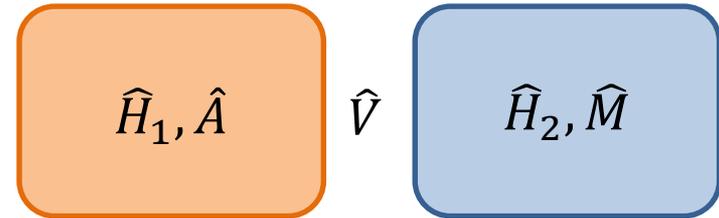
- ΔE は, 測定時間 T でスピンアップ・ダウンを識別しようとしている最中に**二つの状態のエネルギー差の不確定さ**の目安

一般的な定式化へ

- $\hat{H} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2 + \hat{V}$
- $[\hat{H}, \hat{A}] = [\hat{A}, \hat{M}] = 0$
- 対象系の物理量 \hat{A} の値をメーター物理量 \hat{M} で読み取ろうとしている。

対象系

測定器



$$\hat{A} = \sum_a a \hat{P}(a)$$

- $\hat{A} = a$ のときのエネルギー値 $\hat{P}(a)\hat{H}\hat{P}(a)$ と $\hat{A} = a'$ のときのエネルギー値 $\hat{P}(a')\hat{H}\hat{P}(a')$ を語る事ができるし, その差を語ることもできる。

主結果

$$\hat{M}(t) := e^{i\hat{H}t/\hbar} \cdot \hat{M} \cdot e^{-i\hat{H}t/\hbar}$$

初期状態において

$$\langle \hat{P}(a) \hat{M}(0) \hat{P}(a) \rangle = \langle \hat{P}(a') \hat{M}(0) \hat{P}(a') \rangle$$

ならば,

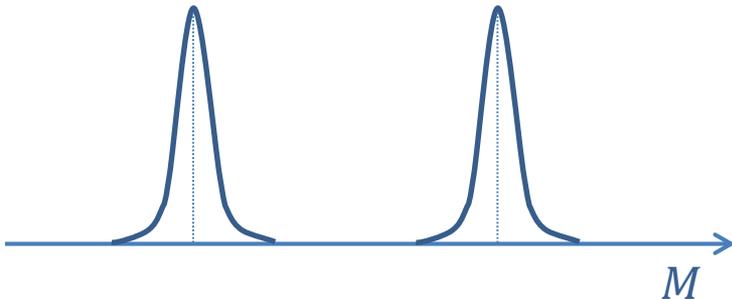
$$\begin{aligned} & T \cdot \sigma \left(\hat{P}(a) \hat{H} \hat{P}(a) - \hat{P}(a') \hat{H} \hat{P}(a') \right) \\ & \geq \frac{\hbar}{2} \cdot \frac{ \left| \langle \hat{P}(a) \hat{M}(T) \hat{P}(a) \rangle - \langle \hat{P}(a') \hat{M}(T) \hat{P}(a') \rangle \right| }{ \frac{1}{T} \int_0^T \sigma(\hat{P}(a) \hat{M}(t) \hat{P}(a)) dt + \frac{1}{T} \int_0^T \sigma(\hat{P}(a') \hat{M}(t) \hat{P}(a')) dt } \end{aligned}$$

解釈

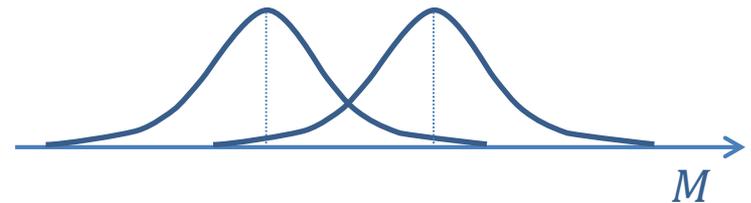
右辺は signal/noise ratio である:

$$T \cdot \sigma \left(\hat{P}(a) \hat{H} \hat{P}(a) - \hat{P}(a') \hat{H} \hat{P}(a') \right) \\ \geq \frac{\hbar}{2} \cdot \frac{|\langle \hat{P}(a) \hat{M}(T) \hat{P}(a) \rangle - \langle \hat{P}(a') \hat{M}(T) \hat{P}(a') \rangle|}{\frac{1}{T} \int_0^T \sigma(\hat{P}(a) \hat{M}(t) \hat{P}(a)) dt + \frac{1}{T} \int_0^T \sigma(\hat{P}(a') \hat{M}(t) \hat{P}(a')) dt}$$

S/N 比が大



S/N 比が小

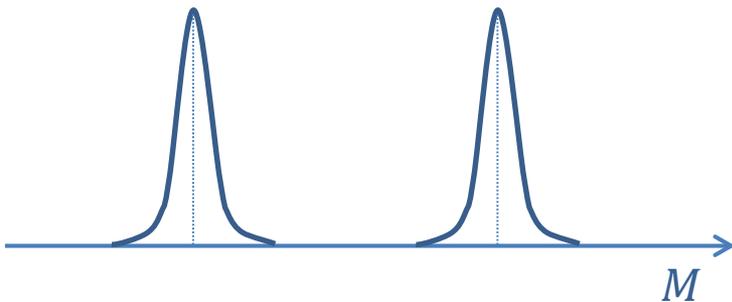


解釈

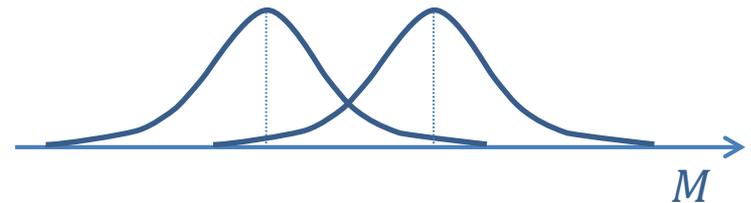
測定時間と、エネルギー差のゆらぎと、
signal/noise ratio の関係式になっている：

$$T \cdot \sigma \left(\hat{P}(a) \hat{H} \hat{P}(a) - \hat{P}(a') \hat{H} \hat{P}(a') \right) \geq \frac{\hbar}{2} \cdot \frac{\text{signal}}{\text{noise}}$$

S/N 比が大



S/N 比が小



まとめ

- 量子論では種々の物理量は演算子で表され, それらの非可換性に根差した, 厳密かつ普遍的な不確定性関係が導かれている.
- 時間とエネルギーの不確定性関係は, いったい何と何の関係なのか, という問題の設定段階からして定説がない.
- ここでは, ある物理量の2値を識別するのに要する測定時間と, 測定中のエネルギー差のゆらぎと, 2値識別のS/N比の間の関係式を一般的に示した.