

圏による操作的理論と量子論

松久 勝彦

ふんわり問題意識

それはそもそも問題なのか？

なぜ圏を持ち込みたいか？

概念ズ

圏論

モノイド圏

その他物理っぽい概念

量子論と圏

そもそもの量子力学

CQM とモノイド圏

Effect と凸空間

物理に圏は使えるのか

文献案内

# 圏による操作的理論と量子論

松久 勝彦

KEK 筒井研究室

2016/04/30/QRPG

# -それはそもそも問題なのか？

圏による操作的理論と量子論

松久 勝彦

ふんわり問題意識

それはそもそも問題なのか？

なぜ圏を持ち込みたいか？

概念ズ

圏論

モノイド圏

その他物理っぽい概念

量子論と圏

そもそもの量子力学

CQM とモノイド圏

Effect と凸空間

物理に圏は使えるのか

文献案内

僕の専攻：量子基礎論

⇒ 量子力学の基礎的な性質を議論しましょうの会

Q. 量子力学の一体何が問題なんですか。

# -それはそもそも問題なのか？

圏による操作的理論と量子論

松久 勝彦

ふんわり問題意識

それはそもそも問題なのか？

なぜ圏を持ち込みたいか？

概念ズ

圏論

モノイド圏

その他物理っぽい概念

量子論と圏

そもそもの量子力学

CQM とモノイド圏

Effect と凸空間

物理に圏は使えるのか

文献案内

## 僕の専攻：量子基礎論

⇒ 量子力学の基礎的な性質を議論しましょうの会

Q. 量子力学の一体何が問題なんですか。

- 嫌われ物のかわいそうなヒルベルト空間

# -それはそもそも問題なのか？

圏による操作的理論と量子論

松久 勝彦

ふんわり問題意識

それはそもそも問題なのか？

なぜ圏を持ち込みたいか？

概念ズ

圏論

モノイド圏

その他物理っぽい概念

量子論と圏

そもそもの量子力学

CQM とモノイド圏

Effect と凸空間

物理に圏は使えるのか

文献案内

## 僕の専攻：量子基礎論

⇒ 量子力学の基礎的な性質を議論しましょうの会

Q. 量子力学の一体何が問題なんですか。

- 嫌われ物のかわいそうなヒルベルト空間
- 散々不思議不思議言われる量子力学

# -それはそもそも問題なのか？

圏による操作的理論と量子論

松久 勝彦

ふんわり問題意識

それはそもそも問題なのか？  
なぜ圏を持ち込みた  
いか？

概念ズ

圏論  
モノイド圏  
その他物理っぽい概念

量子論と圏

そもそもの量子力学  
CQM とモノイド圏  
Effect と凸空間

物理に圏は使えるのか

文献案内

## 僕の専攻：量子基礎論

⇒ 量子力学の基礎的な性質を議論しましょうの会

Q. 量子力学の一体何が問題なんですか。

- 嫌われ物のかわいそうなヒルベルト空間
- 散々不思議不思議言われる量子力学
- 測定問題（とは）

# -それはそもそも問題なのか？

圏による操作的理論と量子論

松久 勝彦

ふんわり問題意識

それはそもそも問題なのか？  
なぜ圏を持ち込みたいか？

概念ズ

圏論  
モノイド圏  
その他物理っぽい概念

量子論と圏

そもそもの量子力学  
CQM とモノイド圏  
Effect と凸空間

物理に圏は使えるのか

文献案内

## 僕の専攻：量子基礎論

⇒ 量子力学の基礎的な性質を議論しましょうの会

Q. 量子力学の一体何が問題なんですか。

- 嫌われ物のかわいそうなヒルベルト空間
- 散々不思議不思議言われる量子力学
- 測定問題（とは）
- 局所実在性（とは）

# -それはそもそも問題なのか？

圏による操作的理論と量子論

松久 勝彦

ふんわり問題意識

それはそもそも問題なのか？  
なぜ圏を持ち込みたいか？

概念ズ

圏論  
モノイド圏  
その他物理っぽい概念

量子論と圏

そももの量子力学  
CQM とモノイド圏  
Effect と凸空間

物理に圏は使えるのか

文献案内

## 僕の専攻：量子基礎論

⇒ 量子力学の基礎的な性質を議論しましょうの会

Q. 量子力学の一体何が問題なんですか。

- 嫌われ物のかわいそうなヒルベルト空間
- 散々不思議不思議言われる量子力学
- 測定問題（とは）
- 局所実在性（とは）
- じゃあ何がどうなら満足なの！はっきりしてよ！（逆ギレ）

# -それはそもそも問題なのか？

圏による操作的理論と量子論

松久 勝彦

ふんわり問題意識

それはそもそも問題なのか？  
なぜ圏を持ち込みたいか？

概念ズ

圏論  
モノイド圏  
その他物理っぽい概念

量子論と圏

そもそもの量子力学  
CQM とモノイド圏  
Effect と凸空間

物理に圏は使えるのか

文献案内

## 僕の専攻：量子基礎論

⇒ 量子力学の基礎的な性質を議論しましょうの会

Q. 量子力学の一体何が問題なんですか。

- 嫌われ物のかわいそうなヒルベルト空間
- 散々不思議不思議言われる量子力学
- 測定問題（とは）
- 局所実在性（とは）
- じゃあ何がどうなら満足なの！はっきりしてよ！（逆ギレ）
- あの娘（他の理論）はいいの？なんで私なの！（逆ギレ）

# -それはそもそも問題なのか？

圏による操作的理論と量子論

松久 勝彦

ふんわり問題意識

それはそもそも問題なのか？  
なぜ圏を持ち込みたいか？

概念ズ

圏論  
モノイド圏  
その他物理っぽい概念

量子論と圏

そももの量子力学  
CQM とモノイド圏  
Effect と凸空間

物理に圏は使えるのか

文献案内

## 僕の専攻：量子基礎論

⇒ 量子力学の基礎的な性質を議論しましょうの会

Q. 量子力学の一体何が問題なんですか。

- 嫌われ物のかわいそうなヒルベルト空間
- 散々不思議不思議言われる量子力学
- 測定問題（とは）
- 局所実在性（とは）
- じゃあ何がどうなら満足なの！はっきりしてよ！（逆ギレ）
- あの娘（他の理論）はいいの？なんで私なの！（逆ギレ）
- もういい！私コペンハーゲン解釈するから！（はい）※

※仕方がないね

# -それはそもそも問題なのか？

量子力学成立以来、思い思いの「こんな理論だといいいね！」

圏による操作的理論と量子論

松久 勝彦

ふんわり問題意識

それはそもそも問題なのか？

なぜ圏を持ち込みたいか？

概念ズ

圏論

モノイド圏

その他物理っぽい概念

量子論と圏

そもそもの量子力学

CQM とモノイド圏

Effect と凸空間

物理に圏は使えるのか

文献案内

# -それはそもそも問題なのか？

圏による操作的理論と量子論

松久 勝彦

ふんわり問題意識

それはそもそも問題なのか？

なぜ圏を持ち込みたいか？

概念ズ

圏論

モノイド圏

その他物理っぽい概念

量子論と圏

そもそもの量子力学

CQM とモノイド圏

Effect と凸空間

物理に圏は使えるのか

文献案内

量子力学成立以来、思い思いの「こんな理論だといいいね！」

- 因果律/(局所) 実在性があるべき

# -それはそもそも問題なのか？

量子力学成立以来、思い思いの「こんな理論だといいいね！」

- 因果律/(局所) 実在性があるべき
- 操作的視点から正当化されるべき

圏による操作的理論と量子論

松久 勝彦

ふんわり問題意識

それはそもそも問題なのか？

なぜ圏を持ち込みたいか？

概念ズ

圏論

モノイド圏

その他物理っぽい概念

量子論と圏

そもそもの量子力学

CQM とモノイド圏

Effect と凸空間

物理に圏は使えるのか

文献案内

# -それはそもそも問題なのか？

圏による操作的理論と量子論

松久 勝彦

ふんわり問題意識

それはそもそも問題なのか？

なぜ圏を持ち込みたいか？

概念ズ

圏論

モノイド圏

その他物理っぽい概念

量子論と圏

そもそもの量子力学

CQM とモノイド圏

Effect と凸空間

物理に圏は使えるのか

文献案内

量子力学成立以来、思い思いの「こんな理論だといいいね！」

- 因果律/(局所) 実在性があるべき
- 操作的視点から正当化されるべき
- 物理量の値は状態に対して決まってるべき

# -それはそもそも問題なのか？

量子力学成立以来、思い思いの「こんな理論だといいいね！」

- 因果律/(局所) 実在性があるべき
- 操作的視点から正当化されるべき
- 物理量の値は状態に対して決まってるべき
- 実証主義者なので計算できればどうでもいいわ

圏による操作的理論と量子論

松久 勝彦

ふんわり問題意識

それはそもそも問題なのか？

なぜ圏を持ち込みた  
いか？

概念ズ

圏論

モノイド圏

その他物理っぽい概念

量子論と圏

そもそもの量子力学

CQM とモノイド圏

Effect と凸空間

物理に圏は使

えるのか

文献案内

# -それはそもそも問題なのか？

量子力学成立以来、思い思いの「こんな理論だといいいね！」

- 因果律/(局所) 実在性があるべき
- 操作的視点から正当化されるべき
- 物理量の値は状態に対して決まってるべき
- 実証主義者なので計算できればどうでもいいわ
- や、なんか一般的な確率論のサブセットで…

圏による操作的理論と量子論

松久 勝彦

ふんわり問題意識

それはそもそも問題なのか？

なぜ圏を持ち込みたいか？

概念ズ

圏論

モノイド圏

その他物理っぽい概念

量子論と圏

そもそもの量子力学

CQM とモノイド圏

Effect と凸空間

物理に圏は使えるのか

文献案内

# -それはそもそも問題なのか？

圏による操作的理論と量子論

松久 勝彦

ふんわり問題意識

それはそもそも問題なのか？  
なぜ圏を持ち込みたいか？

概念ズ

圏論  
モノイド圏  
その他物理っぽい概念

量子論と圏

そもそもの量子力学  
CQM とモノイド圏  
Effect と凸空間

物理に圏は使えるのか

文献案内

量子力学成立以来、思い思いの「こんな理論だといいいね！」

- 因果律/(局所) 実在性があるべき
- 操作的視点から正当化されるべき
- 物理量の値は状態に対して決まってるべき
- 実証主義者なので計算できればどうでもいいわ
- や、なんか一般的な確率論のサブセットで…
- や、なんかそういう非古典論理があって…

# -それはそもそも問題なのか？

圏による操作的理論と量子論

松久 勝彦

ふんわり問題意識

それはそもそも問題なのか？  
なぜ圏を持ち込みたいか？

概念ズ

圏論  
モノイド圏  
その他物理っぽい概念

量子論と圏

そもそもの量子力学  
CQM とモノイド圏  
Effect と凸空間

物理に圏は使えるのか

文献案内

量子力学成立以来、思い思いの「こんな理論だといいいね！」

- 因果律/(局所) 実在性があるべき
- 操作的視点から正当化されるべき
- 物理量の値は状態に対して決まってるべき
- 実証主義者なので計算できればどうでもいいわ
- や、なんか一般的な確率論のサブセットで…
- や、なんかそういう非古典論理があって…
- や、なんか弱値とかいうのが真の物理量で…

# -それはそもそも問題なのか？

圏による操作的理論と量子論

松久 勝彦

ふんわり問題意識

それはそもそも問題なのか？  
なぜ圏を持ち込みたいか？

概念ズ

圏論

モノイド圏

その他物理っぽい概念

量子論と圏

そもそもの量子力学  
CQM とモノイド圏  
Effect と凸空間

物理に圏は使えるのか

文献案内

量子力学成立以来、思い思いの「こんな理論だといいいね！」

- 因果律/(局所) 実在性があるべき
- 操作的視点から正当化されるべき
- 物理量の値は状態に対して決まってるべき
- 実証主義者なので計算できればどうでもいいわ
- や、なんか一般的な確率論のサブセットで…
- や、なんかそういう非古典論理があって…
- や、なんか弱値とかいうのが真の物理量で…
- や、なんかそういう複素確率測度があって…

# -それはそもそも問題なのか？

圏による操作的理論と量子論

松久 勝彦

ふんわり問題意識

それはそもそも問題なのか？  
なぜ圏を持ち込みたいか？

概念ズ

圏論

モノイド圏

その他物理っぽい概念

量子論と圏

そもそもの量子力学  
CQM とモノイド圏  
Effect と凸空間

物理に圏は使えるのか

文献案内

量子力学成立以来、思い思いの「こんな理論だといいいね！」

- 因果律/(局所) 実在性があるべき
- 操作的視点から正当化されるべき
- 物理量の値は状態に対して決まってるべき
- 実証主義者なので計算できればどうでもいいわ
- や、なんか一般的な確率論のサブセットで…
- や、なんかそういう非古典論理があって…
- や、なんか弱値とかいうのが真の物理量で…
- や、なんかそういう複素確率測度があって…
- や、なんかそういう非可換物理量代数があって…

# -それはそもそも問題なのか？

圏による操作的理論と量子論

松久 勝彦

ふんわり問題意識

それはそもそも問題なのか？  
なぜ圏を持ち込みたいか？

概念ズ

圏論

モノイド圏

その他物々ばい概念

量子論と圏

そもそもの量子力学

CQM とモノイド圏

Effect と凸空間

物理に圏は使えるのか

文献案内

量子力学成立以来、思い思いの「こんな理論だといいいね！」

- 因果律/(局所) 実在性があるべき
- 操作的視点から正当化されるべき
- 物理量の値は状態に対して決まってるべき
- 実証主義者なので計算できればどうでもいいわ
- や、なんか一般的な確率論のサブセットで…
- や、なんかそういう非古典論理があって…
- や、なんか弱値とかいうのが真の物理量で…
- や、なんかそういう複素確率測度があって…
- や、なんかそういう非可換物理量代数があって…
- $(\lambda X, \text{量子 } X) \in \text{End}(\text{研究})$

# -それはそもそも問題なのか？

圏による操作的理論と量子論

松久 勝彦

ふんわり問題意識

それはそもそも問題なのか？  
なぜ圏を持ち込みたいか？

概念ズ

圏論

モノイド圏

その他物理っぽい概念

量子論と圏

そもそもの量子力学  
CQM とモノイド圏  
Effect と凸空間

物理に圏は使えるのか

文献案内

量子力学成立以来、思い思いの「こんな理論だといいいね！」

- 因果律/(局所) 実在性があるべき
- 操作的視点から正当化されるべき
- 物理量の値は状態に対して決まってるべき
- 実証主義者なので計算できればどうでもいいわ
- や、なんか一般的な確率論のサブセットで…
- や、なんかそういう非古典論理があって…
- や、なんか弱値とかいうのが真の物理量で…
- や、なんかそういう複素確率測度があって…
- や、なんかそういう非可換物理量代数があって…
- $(\lambda X, \text{量子 } X) \in \text{End}(\text{研究})$

みんなちがってみんないい。

# -それはそもそも問題なのか？

圏による操作的理論と量子論

松久 勝彦

ふんわり問題意識

それはそもそも問題なのか？  
なぜ圏を持ち込みたいか？

概念ズ

圏論

モノイド圏

その他物理っぽい概念

量子論と圏

そもそもの量子力学  
CQM とモノイド圏  
Effect と凸空間

物理に圏は使えるのか

文献案内

量子力学成立以来、思い思いの「こんな理論だといいいね！」

- 因果律/(局所) 実在性があるべき
- 操作的視点から正当化されるべき
- 物理量の値は状態に対して決まってるべき
- 実証主義者なので計算できればどうでもいいわ
- や、なんか一般的な確率論のサブセットで…
- や、なんかそういう非古典論理があって…
- や、なんか弱値とかいうのが真の物理量で…
- や、なんかそういう複素確率測度があって…
- や、なんかそういう非可換物理量代数があって…
- $(\lambda X, \text{量子 } X) \in \text{End}(\text{研究})$

みんなちがってみんないい。

物理やめたい。

# (非量子の方に向けて：何の話？)

圏による操作的理論と量子論

松久 勝彦

ふんわり問題意識

それはそもそも問題なのか？

なぜ圏を持ち込みたいか？

概念ズ

圏論

モノイド圏

その他物理っぽい概念

量子論と圏

そもそもの量子力学

CQM とモノイド圏

Effect と凸空間

物理に圏は使えるのか

文献案内

- (局所) 実在論：(局所的に) 全ての物理量は値が確定していて、それを統べるパラメータに確率的不確定さがあるだけ、という立場。
- 非古典論理：「物理量がある範囲の値を取るかどうか」の命題論理  $\Leftrightarrow$  対応する射影子のなす束として、ある種の論理のモデルとして QM が出てくるのだという立場。
- 弱値：条件付き行列要素  $\langle \phi, A\psi \rangle / \langle \phi, \psi \rangle$  を真の物理量だと思いたい。
- 複素確率測度：↑の解釈に困ったので複素確率測度の期待値と言い張ることにした。
- 非可換物理量代数：純粹状態に対して物理量が確定するような理論は、物理量を状態空間上の関数環と思える。その延長で見ると、量子物理量は作用素環なので非可換。
- 量子  $X$ ：見たことある最高にヤバイ  $X$  大募集！

# -それはそもそも問題なのか？

「どんな理論がいいですか問題」は実証不能。

David Deutsch: Fabric Reality/世界の究極理論は存在するか

もし正しい予測を行うことがわれわれに課せられた唯一の制約であれば、何であれわれわれの好むものを空間中で運動させるような理論を発明できる。

(中略)

手に入る最良の説明のなかでその人物が果たしている役割だけによって、その存在を暫定的に推測するのだ。※(4章)

※ドイッチュは「実在の線引きは理論に対して決まる(最良/最軽量の理論のプリミティブのことを実在と呼ぶ)」とすることで実在論を擁護できるとしている。

圏による操作的理論と量子論

松久 勝彦

ふんわり問題意識

それはそもそも問題なのか？

なぜ圏を持ち込みたいか？

概念ズ

圏論

モノイド圏

その他物理っぽい概念

量子論と圏

そもそもの量子力学

CQM とモノイド圏 Effect と凸空間

物理に圏は使えるのか

文献案内

# -それはそもそも問題なのか？

「どんな理論がいいですか問題」は実証不能。

David Deutsch: Fabric Reality/世界の究極理論は存在するか

もし正しい予測を行うことがわれわれに課せられた唯一の制約であれば、何であれわれわれの好むものを空間中で運動させるような理論を発明できる。

(中略)

手に入る**最良の説明**のなかでその人物が果たしている役割だけによって、その存在を暫定的に推測するのだ。※(4章)

※ドイッチュは「実在の線引きは理論に対して決まる(最良/最軽量の理論のプリミティブのことを実在と呼ぶ)」とすることで実在論を擁護できるとしている。

⇒「良い理論」とは…？

圏による操作的理論と量子論

松久 勝彦

ふんわり問題意識

それはそもそも問題なのか？

なぜ圏を持ち込みたいか？

概念ズ

圏論

モノイド圏

その他物理っぽい概念

量子論と圏

そもそもの量子力学

CQM とモノイド圏 Effect と凸空間

物理に圏は使えるのか

文献案内

# -それはそもそも問題なのか？

「どんな理論がいいですか問題」は実証不能。

David Deutsch: Fabric Reality/世界の究極理論は存在するか

もし正しい予測を行うことがわれわれに課せられた唯一の制約であれば、何であれわれわれの好むものを空間中で運動させるような理論を発明できる。

(中略)

手に入る**最良の説明**のなかでその人物が果たしている役割だけによって、その存在を暫定的に推測するのだ。※(4章)

※ドイッチュは「実在の線引きは理論に対して決まる(最良/最軽量の理論のプリミティブのことを実在と呼ぶ)」とすることで実在論を擁護できるとしている。

⇒「良い理論」とは…？

⇒ **理論間の比較検討をどう行うのか？**

圏による操作的理論と量子論

松久 勝彦

ふんわり問題意識

それはそもそも問題なのか？  
なぜ圏を持ち込みたいか？

概念ズ

圏論  
モノイド圏  
その他物理っぽい概念

量子論と圏

そもそもの量子力学  
CQM とモノイド圏  
Effect と凸空間

物理に圏は使えるのか

文献案内

# (ちょっと脱線：私見による「良い理論」)

## 物理的な要求 ⇒ そこから自然に召喚されるもの

### ■ 解析力学

- 状態はパラメトライズできる ⇒ 配位多様体
- 運動は2階微分まで ⇒ 接束上ラグランジュ形式
- 余接束で変換群と物理量に対応する ⇒ ハミルトン形式

### ■ 熱力学

- 状態は数個の実数で指定できる ⇒ 状態空間
- 可能な断熱操作 ⇒ 前順序とそのエントロピー表現
- 平衡は常に可能 ⇒ エントロピーの凸性と凸解析

### ■ 特殊相対論

- 時空はミンコフスキー ⇒ 平坦な四次元多様体
- 「光」概念があって、一定速度 ⇒ ローレンツ群

### ■ 一般相対論

- 各点で特殊相対論 ⇒ ローレンツ群主束
- 等価原理 ⇒ 重力は接続に書き込む
- 各点で慣性系がある ⇒ 振率なし, Levi-Civita
- 漸近的にニュートン ⇒ アインシュタイン作用

圏による操作的理論と量子論

松久 勝彦

ふんわり問題意識

それはそもそも問題なのか？

なぜ圏を持ち込みたいか？

概念ズ

圏論

モノイド圏

その他物理っぽい概念

量子論と圏

そもそもの量子力学

CQM とモノイド圏

Effect と凸空間

物理に圏は使えるのか

文献案内

# (ちょっと脱線：私見による「良い理論」)

圏による操作的理論と量子論

松久 勝彦

ふんわり問題意識

それはそもそも問題なのか？

なぜ圏を持ち込みたいのか？

概念ズ

圏論

モノイド圏

その他物理っぽい概念

量子論と圏

そもそもの量子力学

CQM とモノイド圏

Effect と凸空間

物理に圏は使えるのか

文献案内

良い理論：  
数学的実装と理論の仕様がきちんと関係している  
「なぜそれを考えるのか？」が比較的明確

# -なぜ圏を持ち込みたいか？

個人的な動機：圏はかっこいい。

## 圏論

圏論（けんろん、category theory）は、数学的構造とその間の関係を抽象的に扱う数学理論の1つである。考えている種類の「構造」を持った対象とその構造を反映するような対象間の射の集まりからなる圏が基本的な考察の対象になる。  
(wikipedia より)

圏による操作的理論と量子論

松久 勝彦

ふんわり問題意識

それはそもそも問題なのか？  
なぜ圏を持ち込みたいか？

概念ズ

圏論  
モノイド圏  
その他物理っぽい概念

量子論と圏

そもそもの量子力学  
CQM とモノイド圏  
Effect と凸空間

物理に圏は使えるのか

文献案内

# -なぜ圏を持ち込みたいか？

個人的な動機：圏はかっこいい。

## 圏論

圏論（けんろん、category theory）は、**物理理論**の構造とその間の関係を抽象的に扱う数学理論の 1 つである。考えている種類の「構造」を持った**物理系**とその構造を反映するような対象間の**プロセス**の集まりからなる圏が基本的な考察の対象になる。（俺 pedia より）

圏による操作的理論と量子論

松久 勝彦

ふんわり問題意識

それはそもそも問題なのか？  
なぜ圏を持ち込みたいか？

概念ズ

圏論  
モノイド圏  
その他物理っぽい概念

量子論と圏

そもそもの量子力学  
CQM とモノイド圏  
Effect と凸空間

物理に圏は使えるのか

文献案内

# -なぜ圏を持ち込みたいか？

個人的な動機：圏はかっこいい。

## 圏論

圏論（けんろん、category theory）は、**物理理論**の構造とその間の関係を抽象的に扱う数学理論の1つである。考えている種類の「構造」を持った**物理系**とその構造を反映するような対象間の**プロセス**の集まりからなる圏が基本的な考察の対象になる。（俺 pedia より）

⇒ 圏の語法で物理理論を統制したい

圏による操作的理論と量子論

松久 勝彦

ふんわり問題意識

それはそもそも問題なのか？  
なぜ圏を持ち込みたいか？

概念ズ

圏論  
モノイド圏  
その他物理っぽい概念

量子論と圏

そもそもの量子力学  
CQM とモノイド圏  
Effect と凸空間

物理に圏は使えるのか

文献案内

# -なぜ圏を持ち込みたいか？

個人的な動機：圏はかっこいい。

## 圏論

圏論（けんろん、category theory）は、**物理理論**の構造とその間の関係を抽象的に扱う数学理論の1つである。考えている種類の「構造」を持った**物理系**とその構造を反映するような対象間の**プロセス**の集まりからなる圏が基本的な考察の対象になる。（俺 pedia より）

⇒ 圏の語法で物理理論を統制したい

⇒ 「どんな性質/仕様の理論があって、互いに関連するか」を圏の語法で議論したい。

圏による操作的理論と量子論

松久 勝彦

ふんわり問題意識

それはそもそも問題なのか？  
なぜ圏を持ち込みたいか？

概念ズ

圏論  
モノイド圏  
その他物理っぽい概念

量子論と圏

そもそもの量子力学  
CQM とモノイド圏  
Effect と凸空間

物理に圏は使えるのか

文献案内

# -なぜ圏を持ち込みたいか？

個人的な動機：圏はかっこいい。

## 圏論

圏論（けんろん、category theory）は、**物理理論**の構造とその間の関係を抽象的に扱う数学理論の1つである。考えている種類の「構造」を持った**物理系**とその構造を反映するような対象間の**プロセス**の集まりからなる圏が基本的な考察の対象になる。（俺 pedia より）

⇒ 圏の語法で物理理論を統制したい

⇒ 「どんな性質/仕様の理論があって、互いに**関連**するか」を圏の語法で議論したい。

圏による操作的理論と量子論

松久 勝彦

ふんわり問題意識

それはそもそも問題なのか？  
なぜ圏を持ち込みたいか？

概念ズ

圏論  
モノイド圏  
その他物理っぽい概念

量子論と圏

そもそもの量子力学  
CQM とモノイド圏  
Effect と凸空間

物理に圏は使えるのか

文献案内

# -なぜ圏を持ち込みたいか？

圏による操作的理論と量子論

松久 勝彦

ふんわり問題意識

それはそもそも問題なのか？  
なぜ圏を持ち込みたいか？

概念ズ

圏論  
モノイド圏  
その他物理っぽい概念

量子論と圏

そもそもの量子力学  
CQM とモノイド圏  
Effect と凸空間

物理に圏は使えるのか

文献案内

個人的な動機：圏はかっこいい。

## 圏論

圏論（けんろん、category theory）は、物理理論の構造とその間の関係を抽象的に扱う数学理論の1つである。考えている種類の「構造」を持った物理系とその構造を反映するような対象間のプロセスの集まりからなる圏が基本的な考察の対象になる。（俺 pedia より）

⇒ 圏の語法で物理理論を統制したい

⇒ 「どんな性質/仕様の理論があって、互いに関連するか」を圏の語法で議論したい。

- 理論間の同値、包含、部分、自由生成、忘却 etc...

# -なぜ圏を持ち込みたいか？

個人的な動機：圏はカッコいい。

## 圏論

圏論（けんろん、category theory）は、物理理論の構造とその間の関係を抽象的に扱う数学理論の1つである。考えている種類の「構造」を持った物理系とその構造を反映するような対象間のプロセスの集まりからなる圏が基本的な考察の対象になる。（俺 pedia より）

⇒ 圏の語法で物理理論を統制したい

⇒ 「どんな性質/仕様の理論があって、互いに関連するか」を圏の語法で議論したい。

- 理論間の同値、包含、部分、自由生成、忘却 etc...
- 数学的構造  $X$  の構成や埋め込み (構造  $X$  の十分性/必要性)

圏による操作的理論と量子論

松久 勝彦

ふんわり問題意識

それはそもそも問題なのか？  
なぜ圏を持ち込みたいか？

概念ズ

圏論  
モノイド圏  
その他物理っぽい概念

量子論と圏

そもそもの量子力学  
CQM とモノイド圏  
Effect と凸空間

物理に圏は使えるのか

文献案内

# -なぜ圏を持ち込みたいか？

個人的な動機：圏はカッコいい。

## 圏論

圏論（けんろん、category theory）は、**物理理論**の構造とその間の関係を抽象的に扱う数学理論の1つである。考えている種類の「構造」を持った**物理系**とその構造を反映するような対象間の**プロセス**の集まりからなる圏が基本的な考察の対象になる。（俺 pedia より）

⇒ 圏の語法で物理理論を統制したい

⇒ 「どんな性質/仕様の理論があって、互いに**関連**するか」を圏の語法で議論したい。

- 理論間の同値、包含、部分、自由生成、忘却 etc...
- 数学的構造  $X$  の構成や埋め込み (構造  $X$  の十分性/必要性)
- 異なる理論構造の間の適切なインターフェースは？

圏による操作的理論と量子論

松久 勝彦

ふんわり問題意識

それはそもそも問題なのか？  
なぜ圏を持ち込みたいか？

概念ズ

圏論  
モノイド圏  
その他物理っぽい概念

量子論と圏

そもそもの量子力学  
CQM とモノイド圏  
Effect と凸空間

物理に圏は使えるのか

文献案内

# CONTENTS

圏による操作的理論と量子論

松久 勝彦

ふんわり問題意識

それはそもそも問題なのか？

なぜ圏を持ち込みたいか？

概念ズ

圏論

モノイド圏

その他物理っぽい概念

量子論と圏

そもそもの量子力学

CQM とモノイド圏

Effect と凸空間

物理に圏は使えるのか

文献案内

今日のお話：

物理理論に使えるような圏や数学の概念の紹介と、それを量子論に持ち込んだ話題の紹介。

- 概念ズ：圏とその他有益概念の導入
  - 圏論
  - モノイド圏
  - その他物理っぽい概念
- 量子論と圏：圏の匂いがする量子論の最近
  - そもそもの量子力学
  - CQM とモノイド圏
  - Effect と凸空間
- 物理に圏は使えるのか
- 文献案内

## Definition

圏 (category)  $\mathbb{C}$  は、

- 対象 (object) の集まり  $Ob_{\mathbb{C}}$ ,
- 射 (arrow, morphism) の集まり  $Ar_{\mathbb{C}}$ ,
- ドメイン (domain)、コドメイン (codomain) の対応  $dom/cod : Ar_{\mathbb{C}} \rightarrow Ob_{\mathbb{C}}$ ,  
これを使って  $Hom(A, B) = \{f | dom f = A, cod f = B\}$  と書く。ホムセットなどという。

■ 射の合成  $\circ : Hom(A, B) \times Hom(B, C) \rightarrow Hom(A, C)$  からなり、次を満たすもの。

- 合成の結合性  $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$
- 各対象  $A$  ごとに恒等射  $id_A$  が存在し、これは  $f \circ id_{dom f} = f = id_{cod f} \circ f$  をみたす。

# -圏論

圏による操作的理論と量子論

松久 勝彦

ふんわり問題意識

それはそもそも問題なのか？  
なぜ圏を持ち込みたいか？

概念ズ

圏論

モノイド圏

その他物理っぽい概念

量子論と圏

そもそもの量子力学  
CQM とモノイド圏  
Effect と凸空間

物理に圏は使えるのか

文献案内

直観的には、結合単位的な演算規則が入ったグラフ。  
例：

- 数学的構造それ自体が圏:集合、群、モノイド、前順序...
- 数学的構造を集めた圏:Set, Grp, Conv, Hilb...
- 高階圏 Cat
- 適当な構成で手に入る圏:直積圏、直和圏、slice 圏、comma 圏、Kleisli 圏、Eilenberg-Moore 圏...

# -圏論

圏による操作的理論と量子論

松久 勝彦

ふんわり問題意識

それはそもそも問題なのか？  
なぜ圏を持ち込みたいか？

概念ズ

圏論  
モノイド圏  
その他物理っぽい概念

量子論と圏

そもそもの量子力学  
CQM とモノイド圏  
Effect と凸空間

物理に圏は使えるのか

文献案内

直観的には、結合単位的な演算規則が入ったグラフ。

例：

- 数学的構造それ自体が圏:集合、群、モノイド、前順序...
- 数学的構造を集めた圏:Set, Grp, Conv, Hilb...
- 高階圏 Cat
- 適当な構成で手に入る圏:直積圏、直和圏、slice 圏、comma 圏、Kleisli 圏、Eilenberg-Moore 圏...

という普通の例に加えて、

- 量子系の圏
- ○○系の圏 (力学、熱力学、確率空間、論理命題...)
- etc...

というのを考えていきたいという話。

※圏の定義で  $\text{dom}$ ,  $\text{cod}$ ,  $\circ$  を入れ替えることで、射が逆向きの圏を常に作れる ( $\mathbb{C}^{op}$ )

## Definition

- 射  $f$  がモノ (mono):  $\forall g, h, fg = fh \Rightarrow g = h$
- 射  $f$  がエピ (epi):  $\forall g, h, gf = hf \Rightarrow g = h$
- 射  $f$  が同型射 (isomorphism):  $f^{-1}$  が存在して  $ff^{-1} = \text{id}_{\text{cod}f}, f^{-1}f = \text{id}_{\text{dom}f}$
- 対象  $A, B$  の間に同型射が存在するとき、この2つは同型であるという。

大変馴染みある平和な概念

## Definition

$\mathbb{C}$  から  $\mathbb{D}$  への共変 (resp. 反変) 関手 (covariant functor)  $F$  とは圏の間の射と対象それぞれの関数  $F_1 : Ob_{\mathbb{C}} \rightarrow Ob_{\mathbb{D}}$   
 $F_2 : Ar_{\mathbb{C}} \rightarrow Ar_{\mathbb{D}}$  からなり、次を満たすものである。

$$\text{dom}F_2(f) = F_1(\text{dom}f) \quad (\text{resp. } F_1(\text{cod}f)) \quad (1)$$

$$\text{cod}F_2(f) = F_1(\text{cod}f) \quad (\text{resp. } F_1(\text{dom}f)) \quad (2)$$

$$F_2(gf) = F_2(g)F_2(f) \quad (\text{resp. } F_2(f)F_2(g)) \quad (3)$$

$$F_2(\text{id}_A) = \text{id}_{F_1(A)} \quad (4)$$

異なる世界 (圏) の間を、対象や射の相対的な関係性 (射の演算) を保って、移し替えるもの。

例：

- ホモロジー  $H_n : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Ab}$
- 群表現  $(V, \rho_V) : G \rightarrow \mathbf{Vect}$
- 双対空間  $(-)^* = \mathbf{Hom}_{\mathbf{Vect}}(-, \mathbb{C}) : \mathbf{Vect} \rightarrow \mathbf{Vect} \times$
- スペクトル  $\Delta : \mathbf{CCstar} \rightarrow \mathbf{Top}$
- 連続関数環  $C : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{CCstar}$
- 自由生成  $F : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Mon}$
- 忘却  $U : \mathbf{Mon} \rightarrow \mathbf{Set}$
- Shanon エントロピーもある種の関手  
(Baez(2011)[arxiv:1106.1791])

※一般に  $\mathbf{Hom}(-, A), \mathbf{Hom}(B, -)$  は関手になる。

## Definition

関手  $F, G : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$  の間の自然変換 (natural transformation)  $\phi : F \rightarrow G$  とは、 $Ob_{\mathbb{C}}$  インデックスを持つ  $Ar_{\mathbb{D}}$  の元たち :  $\{\phi_A : F(A) \rightarrow G(A)\}_{A \in Ob_{\mathbb{C}}}$  で、次の「自然さ」を満たすものとする。任意の  $f \in Ar_{\mathbb{C}}$  に対し、

$$\begin{array}{ccc}
 F(A) & \xrightarrow{\phi_A} & G(A) \\
 F(f) \downarrow & & \downarrow G(f) \\
 F(B) & \xrightarrow{\phi_B} & G(B)
 \end{array} \quad (5)$$

関手の間の射。関手と自然変換でも圏をなす (関手圏  $\mathbb{D}^{\mathbb{C}}$ ) 同型射のみからなる時、自然同型という。

例：

- 二重双対  $\iota : \text{id} \rightarrow (-)^{**} : V \rightarrow V^{**}$  は自然同型※
- 包絡作用素によって関手圏  $\mathbf{Vect}^G$  は表現の圏
- GN-dual:  $\text{id}_{\mathbf{CCstar}} \rightarrow C(\Delta -)$  は自然同型※
- $f : A \rightarrow B$  に対して  $(f \circ -)\text{Hom}(-, A) \rightarrow \text{Hom}(-, B)$

※圏の同値性 (圏の構造がほぼ同じ) とは、  
このように関手のペアが恒等関手と自然同型になること。

# -圏論

圏による操作的理論と量子論

松久 勝彦

ふんわり問題意識

それはそもそも問題なのか？  
なぜ圏を持ち込みた  
いか？

概念ズ

圏論

モノイド圏

その他物理っぽい概念

量子論と圏

そもそもの量子力学  
CQM とモノイド圏  
Effect と凸空間

物理に圏は使えるのか

文献案内

普遍性：

ある性質を持つものとして「最良」「一番単純」「追加の性質がない」ようなものを特徴づける語法。

## 圏における積

対象  $A, B$  について、 $P, p_A : P \rightarrow A, p_B : P \rightarrow B$  の3つ組がこれらのプロダクト (product) であるとは、任意の  $R, f : R \rightarrow A, g : R \rightarrow B$  に対して、唯一つ  $\langle f, g \rangle : R \rightarrow P$  が存在して、次が可換。

$$\begin{array}{ccc} A & \xleftarrow{p_A} & P & \xrightarrow{p_B} & B \\ & \swarrow f & \uparrow \langle f, g \rangle & \searrow g & \\ & & R & & \end{array} \quad (6)$$

こういうものを統べる概念として**随伴**がある。

## Definition

圏  $\mathbb{C}, \mathbb{D}$  の間を結ぶ関手  $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}, G : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  が随伴であるとは、Hom 関手  $\text{Hom}(-, G(-)) : \mathbb{C}^{op} \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbf{Sets}$ ,  $\text{Hom}(F(-), -) : \mathbb{C}^{op} \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbf{Sets}$  の間のある自然同型  $\theta = \{\theta_{A,B}\}_{A \in \text{Ob}_{\mathbb{C}}, B \in \text{Ob}_{\mathbb{D}}}$  が存在すること。

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Hom}(A, G(B)) & \xrightarrow{\theta_{A,B}} & \text{Hom}(F(A), B) & (7) \\
 \downarrow \text{Hom}(f, G(g)) & & \downarrow \text{Hom}(F(f), g) & \\
 \text{Hom}(C, G(D)) & \xrightarrow{\theta_{C,D}} & \text{Hom}(F(C), D) & 
 \end{array}$$

このとき  $F$  は  $G$  の左随伴、 $G$  は  $F$  の右随伴とよび、 $F \dashv G$  と書く。

この射の対応を transpose という。

例：

- 代数の忘却と自由生成  
 $F : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Mon} \dashv U : \mathbf{Mon} \rightarrow \mathbf{Set}$  など
- 積と指数:カルテシアン (モノイダル) 閉  
 $(A \times -) \dashv (-)^A, (A \otimes -) \dashv (A^* \otimes -)$  など  
※これがあるとしばし「高階関数」が扱えるようになったりする。
- 双対型随伴 (Hom 反変関手による随伴)  
 $\mathbf{Hom}_{*\mathbf{Alg}}(-, \mathbb{C}) \dashv \mathbf{Hom}_{\mathbf{Top}}(-, \mathbb{C})$  など  
※  $\mathbf{Hom}(-, X)$  のコドメイン  $X$  はしばし両圏に共通のものであったりする。
- モナドから Kleisli 圏と Eilenberg-Moore 圏を作った時にも随伴がある。※後述

# -圏論

圏による操作的理論と量子論

松久 勝彦

ふんわり問題意識

それはそもそも問題なのか？

なぜ圏を持ち込みたいか？

概念ズ

圏論

モノイド圏

その他物理っぽい概念

量子論と圏

そもそもの量子力学

CQM とモノイド圏

Effect と凸空間

物理に圏は使えるのか

文献案内

Q. 随伴は (物理的に?) どんな意味がありそうか?

# -圏論

圏による操作的理論と量子論

松久 勝彦

ふんわり問題意識

それはそもそも問題なのか？

なぜ圏を持ち込みたいか？

概念ズ

圏論

モノイド圏

その他物理っぽい概念

量子論と圏

そもそもの量子力学

CQM とモノイド圏

Effect と凸空間

物理に圏は使えるのか

文献案内

Q. 随伴は (物理的に?) どんな意味がありそうか?  
例えば  $\mathbb{C}$  は物理的プロセスの世界で  
 $\mathbb{D}$  は論理的世界...

# -圏論

圏による操作的理論と量子論

松久 勝彦

ふんわり問題意識

それはそもそも問題なのか？  
なぜ圏を持ち込みた  
いか？

概念ズ

圏論

モノイド圏  
その他物理っぽい概念

量子論と圏

そもそもの量子力学  
CQM とモノイド圏  
Effect と凸空間

物理に圏は使えるのか

文献案内

Q. 随伴は (物理的に?) どんな意味がありそうか?

例えば  $\mathbb{C}$  は物理的プロセスの世界で

$\mathbb{D}$  は論理的世界...

圏  $\mathbb{C}$  の系  $A$  を

圏  $\mathbb{D}$  の語法  $B$  で

制御/指示/観測/読出ししたい時...

$$f : A \leftrightarrow G(B) \quad : \text{というプロセスで} \quad (8)$$

$$\hat{f} : F(A) \leftrightarrow B \quad : \text{という記述が手に入る} \quad (9)$$

- 関手  $F$  は物理系  $A$  上の語法を生み出す関手
- 関手  $G$  は述語  $B$  を測定器とみなす関手

この考えは  $\text{Conv}$ ,  $\text{EMod}$  の随伴で実際にそう見える。※後述

# -圏論

圏による操作的理論と量子論

松久 勝彦

ふんわり問題意識

それはそもそも問題なのか？  
なぜ圏を持ち込みた  
いか？

概念ズ

圏論

モノイド圏  
その他物理っぽい概念

量子論と圏

そもその量子力学  
CQM とモノイド圏  
Effect と凸空間

物理に圏は使えるのか

文献案内

Q. 随伴は (物理的に?) どんな意味がありそうか?

例えば  $\mathbb{C}$  は物理的プロセスの世界で

$\mathbb{D}$  は論理的世界...

圏  $\mathbb{C}$  の系  $A$  を

圏  $\mathbb{D}$  の語法  $B$  で

制御/指示/観測/読出したい時...

$$f : A \leftrightarrow G(B) \quad : \text{というプロセスで} \quad (8)$$

$$\hat{f} : F(A) \leftrightarrow B \quad : \text{という記述が手に入る} \quad (9)$$

- 関手  $F$  は物理系  $A$  上の語法を生み出す関手
- 関手  $G$  は述語  $B$  を測定器とみなす関手

この考えは  $\text{Conv}$ ,  $\text{EMod}$  の随伴で実際にそう見える。※後述  
随伴は、「圏の間のインターフェース」というイメージ

※随伴の同値定義は他にもある。

- Hom 自然同型:先の定義
- 全ての (余) 普遍射の存在
- 単位、余単位自然変換:検証が簡単

が、ひとまず関手を媒介して、Hom が「自然同型」であれば、随伴であったり、そうでなくとも何かの普遍性と思える。例えば圏の積は随伴の例で、実際対角関手  $\Delta : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{C}$  の右随伴  $\times : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  があって、次の Hom 同型のこと:

$$\text{Hom}_{\mathbb{C}}(A, B \times C) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{C} \times \mathbb{C}}(\Delta A, (B, C)) \quad (10)$$

## Definition

モナド  $T$  とは自己関手  $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  と自然変換  $\eta : \text{id}_{\mathbb{C}} \rightarrow T, \mu : TT \rightarrow T$  の組で、次のように自己関手圏でモノイドダイアグラムを満たすものとする。

$$\begin{array}{ccc}
 T^3 & \xrightarrow{T\mu} & T^2 \\
 \mu T \downarrow & & \downarrow \mu \\
 T^2 & \xrightarrow{\mu} & T
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 T & \xrightarrow{\eta T} & T^2 & \xleftarrow{T\eta} & T \\
 \text{id}_T \searrow & & \downarrow \mu & & \swarrow \text{id}_T \\
 & & T & & 
 \end{array}
 \quad (11)$$

※ちょっと前は Haskell の monad がどうのこうのでバズっていた概念。

モナドは (物理的に???) どんな意味があり得るか？

モナドは (物理的に???) どんな意味があり得るか？  
プログラミングのモナドのご利益と同じ (?)

- 対象  $A$  に「拡張機能」 $T$  をつけて  $TA$  にする。
- $\eta_A : A \rightarrow TA$  は機能  $T$  の自明な使い方
- $\mu_A : TTA \rightarrow TA$  は機能  $T$  のマージ/実行

モナドは (物理的に???) どんな意味があり得るか？  
プログラミングのモナドのご利益と同じ (?)

- 対象  $A$  に「拡張機能」 $T$  をつけて  $TA$  にする。
- $\eta_A : A \rightarrow TA$  は機能  $T$  の自明な使い方
- $\mu_A : TTA \rightarrow TA$  は機能  $T$  のマージ/実行

例：

- $P : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$  : べき集合モナド  
 $P(A) = 2^A, \eta_A = (\lambda x. \{x\}), \mu_A = (\lambda X. \cup X)$
- $M : \mathbf{Hask} \rightarrow \mathbf{Hask}$  : maybe モナド  
余計な一点を添加して「未定義値」を許容する機能
- $IO : \mathbf{Hask} \rightarrow \mathbf{Hask}$  : IO モナド  
 $IOA = (\mathbf{Wolrd} \times A)^{\mathbf{Wolrd}}$   
外界との相互作用をできるようにする。

モナド  $T$  から  $T$  を標準装備する圏を作れる。

## Definition

モナド  $T$  の Kleisli 圏  $Kl(T)$  とは、次のような圏。

$$Ob_{Kl(T)} = Ob_{\mathbb{C}} \quad (12)$$

$$\text{Hom}_{Kl(T)}(A, B) = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(A, TB) \quad (13)$$

$$f \circ_{Kl(T)} g = \mu \circ T(f) \circ g \quad (14)$$

$$\text{id}_A = \eta_A \quad (15)$$

$f \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(A, B)$  は  $T$  の自明な利用  $\eta_A$  をさせることで  $\eta_A f \in \text{Hom}_{Kl(T)}(A, B)$  とできる。

機能  $T$  を自明に使わせる  $F: \mathbb{C} \rightarrow Kl(T)$  と機能  $T$  付き射を元の姿に戻す  $U: Kl(T) \rightarrow \mathbb{C}$  があり、これは随伴  $F \dashv U$  をなす。

$TA \rightarrow A$  型の演算を持つ代数の圏を作れる。

## Definition

モナド  $T$  の  $T$  代数とは、対象と射の組  $(k_A : TA \rightarrow A, A)$  で次を満たすもの。

$$\begin{array}{ccc}
 T^2 A & \xrightarrow{Tk_A} & TA \\
 \mu \downarrow & & \downarrow k_A \\
 TA & \xrightarrow{k_A} & A
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 TA & \xrightarrow{k_A} & A \\
 \eta_A \uparrow & \nearrow \text{id}_A & \\
 A & & 
 \end{array}
 \quad (16)$$

## Definition

(続) $T$ 代数  $(A, k_A : TA \rightarrow A)$ ,  $(B, k_B : TB \rightarrow B)$  の間の準同型射とは、 $f : A \rightarrow B$  次を可換にするものである。

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ k_A \uparrow & & \uparrow k_B \\ TA & \xrightarrow{Tf} & TB \end{array} \quad (17)$$

$T$ 代数とその準同型による圏を Eilenberg-Moore 圏  $EM(T)$  とよぶ。

$A \in \mathbb{C}$  から  $TA$  を作ると、モナドの構造だけから  $T$ 代数  $(\mu_A : TTA \rightarrow TA, TA)$  を作ることができる。  
 $T$ 代数  $(k_A, A)$  は代数構造  $k_A$  を忘却すれば  $\mathbb{C}$  に戻る。この自由生成  $F$  と忘却  $U$  は随伴  $F \dashv U$  になる。

# -圏論

圏による操作的理論と量子論

松久 勝彦

ふんわり問題意識

それはそもそも問題なのか？  
なぜ圏を持ち込みたいか？

概念ズ

圏論  
モノイド圏  
その他物理っぽい概念

量子論と圏

そもそもの量子力学  
CQM とモノイド圏  
Effect と凸空間

物理に圏は使えるのか

文献案内

$F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}, G : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}, F \dashv G$

なとき、 $(GF, F \epsilon G, \eta)$  はモナド。

双対を含めれば、随伴だけで次の構造が一気に誘導できる。

$$\begin{array}{ccc}
 EM(GF) & \xleftarrow{\quad} & EM(FG) \\
 \uparrow \dashv & \swarrow \text{---} & \nearrow \text{---} \downarrow \\
 \mathbb{C} & \xrightarrow{F} & \mathbb{D} \\
 \downarrow \dashv & \searrow \text{---} & \swarrow \text{---} \downarrow \\
 Kl(GF) & \xleftarrow{G} & Kl(FG)
 \end{array}
 \quad (18)$$

The diagram illustrates the relationship between the monads  $EM(GF)$  and  $EM(FG)$  and the comonads  $Kl(GF)$  and  $Kl(FG)$  in the context of an adjunction  $F \dashv G$  between categories  $\mathbb{C}$  and  $\mathbb{D}$ . The top row shows the monads  $EM(GF)$  and  $EM(FG)$  with a natural transformation  $\dashv$  from  $EM(GF)$  to  $EM(FG)$ . The bottom row shows the comonads  $Kl(GF)$  and  $Kl(FG)$  with a natural transformation  $\dashv$  from  $Kl(GF)$  to  $Kl(FG)$ . The middle row shows the categories  $\mathbb{C}$  and  $\mathbb{D}$  with the adjunction  $F \dashv G$ . The natural transformations  $\dashv$  are represented by vertical arrows with a hook-like symbol. The comonads are connected to the categories by natural transformations  $\dashv$  (downward from  $\mathbb{C}$  to  $Kl(GF)$  and upward from  $\mathbb{D}$  to  $Kl(FG)$ ). The monads are connected to the categories by natural transformations  $\dashv$  (upward from  $\mathbb{C}$  to  $EM(GF)$  and downward from  $\mathbb{D}$  to  $EM(FG)$ ). The comonads are also connected to each other by natural transformations  $\dashv$  (downward from  $Kl(GF)$  to  $Kl(FG)$  and upward from  $Kl(FG)$  to  $Kl(GF)$ ).

幸せな気持ちが生じる (要出典)

# -モノイド圏

圏による操作的理論と量子論

松久 勝彦

ふんわり問題意識

それはそもそも問題なのか？  
なぜ圏を持ち込みた  
いか？

概念ズ

圏論  
モノイド圏  
その他物理っぽい概念

量子論と圏

そもその量子力学  
CQM とモノイド圏  
Effect と凸空間

物理に圏は使えるのか

文献案内

対象の二項演算が定義出来るような圏

## Definition

圏  $\mathcal{C}$  がモノイド圏 (monoidal category) であるとは、**双関手**  $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ 、特別な**単位元**  $I \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ 、双関手の合成によって作られる幾つかの関手たちの間の自然同型  $\alpha : (- \otimes (- \otimes -)) \rightarrow ((- \otimes -) \otimes -)$ ,  $\rho : I \otimes - \rightarrow \text{id}_{\mathcal{C}}$ ,  $\lambda : - \otimes I \rightarrow \text{id}_{\mathcal{C}}$  の組  $(\mathcal{C}, \otimes, \alpha, \rho, \lambda, I)$  のこと。更に自然同型として  $\sigma_{A,B} A \otimes B \rightarrow B \otimes A$  があれば、対称モノイド圏という。

※自然変換は  $\otimes$  の結合律、単位律、対象律を示すもの。

※本当は「同型になるべき」対象間の  $\alpha, \lambda, \rho, \sigma$  による同型が一意的に決まる為の条件が入る。

# -モノイド圏

圏による操作的理論と量子論

松久 勝彦

ふんわり問題意識

それはそもそも問題なのか？  
なぜ圏を持ち込みた  
いか？

概念ズ

圏論

モノイド圏

その他物理っぽい概念

量子論と圏

そもそもの量子力学  
CQM とモノイド圏  
Effect と凸空間

物理に圏は使えるのか

文献案内

モノイド積  $\otimes$  は例えば圏論的な積  $\times$  でも入れることができるが、これは一般にそれよりもゆるい。

もし  $\otimes$  が  $\times$  ならば、「合成系」の振る舞いが部分系の振る舞いだけで決まる。

モノイド圏の例：

- $\times$  で入れる奴: **Set, Grp...**(積を持つ全ての圏)
- 積ではないもの **Vect, Hilb,  $\mathbb{C}^{\mathbb{C}}$**

# -モノイド圏

圏による操作的理論と量子論

松久 勝彦

ふんわり問題意識

それはそもそも問題なのか？  
なぜ圏を持ち込みた  
いか？

概念ズ

圏論

モノイド圏

その他物理っぽい概念

量子論と圏

そもそもの量子力学  
CQM とモノイド圏  
Effect と凸空間

物理に圏は使えるのか

文献案内

モノイド積  $\otimes$  は例えば圏論的な積  $\times$  でも入れることができるが、これは一般にそれよりもゆるい。

もし  $\otimes$  が  $\times$  ならば、「合成系」の振る舞いが部分系の振る舞いだけで決まる。

モノイド圏の例：

- $\times$  で入れる奴: **Set, Grp...** (積を持つ全ての圏)
- 積ではないもの **Vect, Hilb,  $\mathbb{C}^{\mathbb{C}}$**

圏の対象と射をそれぞれ物理系とプロセスのアナロジーで捉えているので、

# -モノイド圏

圏による操作的理論と量子論

松久 勝彦

ふんわり問題意識

それはそもそも問題なのか？  
なぜ圏を持ち込みた  
いか？

概念ズ

圏論

モノイド圏

その他物理っぽい概念

量子論と圏

そもその量子力学  
CQM とモノイド圏  
Effect と凸空間

物理に圏は使  
えるのか

文献案内

モノイド積  $\otimes$  は例えば圏論的な積  $\times$  でも入れることができるが、これは一般にそれよりもゆるい。

もし  $\otimes$  が  $\times$  ならば、「合成系」の振る舞いが部分系の振る舞いだけで決まる。

モノイド圏の例：

- $\times$  で入れる奴: **Set, Grp...** (積を持つ全ての圏)
- 積ではないもの **Vect, Hilb,  $\mathbb{C}^{\mathbb{C}}$**

圏の対象と射をそれぞれ物理系とプロセスのアナロジーで捉えているので、

- 「系合成」を考えられる一般的なシステム論は何らかのモノイド圏の姿をしている。

# -その他物理っぽい概念

圏による操作的理論と量子論

松久 勝彦

ふんわり問題意識

それはそもそも問題なのか？  
なぜ圏を持ち込みた  
いか？

概念ズ

圏論  
モノイド圏  
その他物理っぽい概念

量子論と圏

そもそもの量子力学  
CQM とモノイド圏  
Effect と凸空間

物理に圏は使えるのか

文献案内

## Definition

凸空間 (convex space) とは、「凸結合」演算を備えた集合  $(X, \{c_p : X \times X \rightarrow X\}_{p \in [0,1]})$  で、次を満たす物。

$$c_0(x, y) = x \quad (19)$$

$$c_p(x, x) = x \quad (20)$$

$$c_p(x, y) = c_{1-p}(y, x) \quad (21)$$

$$c_p(x, c_q(y, z)) = c_{pq}(c_r(x, y), z) \quad (22)$$

$$\text{s.t. } p(1 - q) = (1 - pq)r \quad (23)$$

凸空間の射とは、 $c_p$  についての準同型とする。

※アファイン、線形空間の「凸集合」よりもストイック  
※確率混合が意味を持つなら、凸集合である。

# -その他物理っぽい概念

圏による操作的理論と量子論

松久 勝彦

ふんわり問題意識

それはそもそも問題なのか？  
なぜ圏を持ち込みた  
いか？

概念ズ

圏論

モノイド圏  
その他物理っぽい概念

量子論と圏

そもそもの量子力学  
CQM とモノイド圏  
Effect と凸空間

物理に圏は使えるのか

文献案内

## Definition

Effect 代数とは、部分 $\ast$ 可換モノイド  $(M, \otimes)$  で、次の補元演算  $(-)^{\perp}$  が備わったものとする。

$$1 = 0^{\perp} \quad (24)$$

$$p^{\perp} \otimes p = 1 \quad (25)$$

但し  $p^{\perp}$  はこのような性質を満たして唯一とする。  
また、 $[0, 1]$  が通常の module のように Effect 代数に作用しているとき、これを Effect-Module とする。

※部分とは、 $\otimes$  が定義されない可能性がある事。

例：

Boole 代数, 1 以下正值作用素, 射影子束,  $\sigma$  代数, 単位区間  $[0, 1], [0, 1]$  への関数空間

# -その他物理っぽい概念

圏による操作的理論と量子論

松久 勝彦

ふんわり問題意識

それはそもそも問題なのか？  
なぜ圏を持ち込みた  
いか？

概念ズ

圏論  
モノイド圏  
その他物理っぽい概念

量子論と圏

そもそもの量子力学  
CQM とモノイド圏  
Effect と凸空間

物理に圏は使えるのか

文献案内

Q.Effect 代数とは何の抽象化なのか？

元は Bennett, Foulis(1993) による Boole 代数の一般化で、量子論や確率論等の「確率的命題」のなす代数のつもり。

# -その他物理っぽい概念

圏による操作的理論と量子論

松久 勝彦

ふんわり問題意識

それはそもそも問題なのか？

なぜ圏を持ち込みたいか？

概念ズ

圏論

モノイド圏

その他物理っぽい概念

量子論と圏

そもそもの量子力学

CQM とモノイド圏

Effect と凸空間

物理に圏は使えるのか

文献案内

Q.Effect 代数とは何の抽象化なのか？

元は Bennett, Foulis(1993) による Boole 代数の一般化で、量子論や確率論等の「確率的命題」のなす代数のつもり。

なぜ  $\wedge, \vee$  でなく、部分定義な  $\otimes$  が基本演算かということ、

# -その他物理っぽい概念

圏による操作的理論と量子論

松久 勝彦

ふんわり問題意識

それはそもそも問題なのか？  
なぜ圏を持ち込みたいか？

概念ズ

圏論  
モノイド圏  
その他物理っぽい概念

量子論と圏

そもそもの量子力学  
CQM とモノイド圏  
Effect と凸空間

物理に圏は使えるのか

文献案内

Q.Effect 代数とは何の抽象化なのか？

元は Bennett, Foulis(1993) による Boole 代数の一般化で、量子論や確率論等の「確率的命題」のなす代数のつもり。

なぜ  $\wedge, \vee$  でなく、部分定義な  $\vee$  が基本演算かということ、

- 確率は加法性を持つが **1 を超えない**

# -その他物理っぽい概念

圏による操作的理論と量子論

松久 勝彦

ふんわり問題意識

それはそもそも問題なのか？

なぜ圏を持ち込みたいか？

概念ズ

圏論

モノイド圏

その他物理っぽい概念

量子論と圏

そもそもの量子力学

CQM とモノイド圏

Effect と凸空間

物理に圏は使えるのか

文献案内

Q.Effect 代数とは何の抽象化なのか？

元は Bennett, Foulis(1993) による Boole 代数の一般化で、量子論や確率論等の「確率的命題」のなす代数のつもり。

なぜ  $\wedge, \vee$  でなく、部分定義な  $\odot$  が基本演算かということ、

- 確率は加法性を持つが **1 を超えない**
- Lebesgue 積分を単関数近似から作る時、特性関数の可測集合は **非交差**

# -その他物理っぽい概念

圏による操作的理論と量子論

松久 勝彦

ふんわり問題意識

それはそもそも問題なのか？

なぜ圏を持ち込みたいか？

概念ズ

圏論

モノイド圏

その他物理っぽい概念

量子論と圏

そもそもの量子力学

CQM とモノイド圏

Effect と凸空間

物理に圏は使えるのか

文献案内

Q.Effect 代数とは何の抽象化なのか？

元は Bennett, Foulis(1993) による Boole 代数の一般化で、量子論や確率論等の「確率的命題」のなす代数のつもり。

なぜ  $\wedge, \vee$  でなく、部分定義な  $\vee$  が基本演算かということ、

- 確率は加法性を持つが **1 を超えない**
- Lebesgue 積分を単関数近似から作る時、特性関数の可測集合は**非交差**
- 量子論理 (射影演算子 is proposition) などを見ると一般には**足せない** (非直交または交差)

# -その他物理っぽい概念

圏による操作的理論と量子論

松久 勝彦

ふんわり問題意識

それはそもそも問題なのか？  
なぜ圏を持ち込みたいか？

概念ズ

圏論  
モノイド圏  
その他物理っぽい概念

量子論と圏

そもそもの量子力学  
CQM とモノイド圏  
Effect と凸空間

物理に圏は使えるのか

文献案内

Q.Effect 代数とは何の抽象化なのか？

元は Bennett, Foulis(1993) による Boole 代数の一般化で、量子論や確率論等の「確率的命題」のなす代数のつもり。

なぜ  $\wedge, \vee$  でなく、部分定義な  $\vee$  が基本演算かということ、

- 確率は加法性を持つが **1 を超えない**
- Lebesgue 積分を単関数近似から作る時、特性関数の可測集合は **非交差**
- 量子論理 (射影演算子 is proposition) などを見ると一般には **足せない** (非直交または交差)

などの「**排他性**」があるからと思われる。

例えば「事象 A は蓋然性 0.5」と「事象 B は蓋然性 0.7」の「和」は  $A \cap B = \emptyset$  でないと意味を持たない。

# -その他物理っぽい概念

当然凸空間や Effect 代数、Effect-mod のなす圏を考えることができる。

**Conv, EAlg, EMod**

(26)

圏による操作的理論と量子論

松久 勝彦

ふんわり問題意識

それはそもそも問題なのか？  
なぜ圏を持ち込みた  
いか？

概念ズ

圏論  
モノイド圏  
その他物理っぽい概念

量子論と圏

そもそもの量子力学  
CQM とモノイド圏  
Effect と凸空間

物理に圏は使えるのか

文献案内

# -その他物理っぽい概念

圏による操作的理論と量子論

松久 勝彦

ふんわり問題意識

それはそもそも問題なのか？  
なぜ圏を持ち込みた  
いか？

概念ズ

圏論  
モノイド圏  
その他物理っぽい概念

量子論と圏

そもそもの量子力学  
CQM とモノイド圏  
Effect と凸空間

物理に圏は使えるのか

文献案内

当然凸空間や Effect 代数、Effect-mod のなす圏を考えることができる。

**Conv, EAlg, EMod**

(26)

- 確率混合が許容されるシステム論は **Conv** のどこかに棲んでいる。

# -その他物理っぽい概念

圏による操作的理論と量子論

松久 勝彦

ふんわり問題意識

それはそもそも問題なのか？  
なぜ圏を持ち込みた  
いか？

概念ズ

圏論  
モノイド圏  
その他物理っぽい概念

量子論と圏

そもそもの量子力学  
CQM とモノイド圏  
Effect と凸空間

物理に圏は使えるのか

文献案内

当然凸空間や Effect 代数、Effect-mod のなす圏を考えることができる。

**Conv, EAlg, EMod**

(26)

- 確率混合が許容されるシステム論は **Conv** のどこかに棲んでいる。
- 排他性, 曖昧さをもつ述語論理は **EAlg, EMod** のどこかに棲んでいる。

## -その他物理っぽい概念

圏による操作的理論と量子論

松久 勝彦

ふんわり問題意識

それはそもそも問題なのか？  
なぜ圏を持ち込みた  
いか？

概念ズ

圏論  
モノイド圏  
その他物理っぽい概念

量子論と圏

そもそもの量子力学  
CQM とモノイド圏  
Effect と凸空間

物理に圏は使えるのか

文献案内

当然凸空間や Effect 代数、Effect-mod のなす圏を考えることができる。

**Conv, EAlg, EMod** (26)

- 確率混合が許容されるシステム論は **Conv** のどこかに棲んでいる。
- 排他性、曖昧さをもつ述語論理は **EAlg, EMod** のどこかに棲んでいる。
- **Conv, EMod** の間には双対随伴があり、システム  $A \in \mathbf{Emod}$  の情報を、述語  $B \in \mathbf{Conv}$  の語法で記述する系統的方法がある。  
[B.Jacobs(2013)] ※

※後述

# -その他物理っぽい概念

圏による操作的理論と量子論

松久 勝彦

ふんわり問題意識

それはそもそも問題なのか？  
なぜ圏を持ち込みたのか？

概念ズ

圏論

モノイド圏

その他物理っぽい概念

量子論と圏

そもそもの量子力学  
CQM とモノイド圏  
Effect と凸空間

物理に圏は使えるのか

文献案内

確率論一般について、次のモナドがある。

## Definition

Giry モナド  $G$  とは、可測空間の圏  $\text{Meas}$  上の自己関手で、 $G(A)$  を「 $A$  上の確率測度全てによる可測空間」で、その  $\sigma$  代数を評価関数が可測になる最弱で入れる物とする。これは次の自然変換によって、モナドになる。

$$\eta_A : A \rightarrow GA \quad (27)$$

$$:: x \in A \mapsto \delta_x \quad (28)$$

$$\mu_A : GGA \rightarrow GA \quad (29)$$

$$:: \mu \in GGA \mapsto \int_{GA} \nu d\mu(\nu) \quad (30)$$

# -その他物理っぽい概念

圏による操作的理論と量子論

松久 勝彦

ふんわり問題意識

それはそもそも問題なのか？  
なぜ圏を持ち込みた  
いか？

概念ズ

圏論  
モノイド圏  
その他物理っぽい概念

量子論と圏

そもそもの量子力学  
CQM とモノイド圏  
Effect と凸空間

物理に圏は使えるのか

文献案内

初出は Giry(1980) だが、最近 (圏と統計学の流行を受けて?) リバイバルした。(Jacobs(2015)/Sturtz(2014)/Avery(2014))

- Strutz/Avery: Condensity Monad  
(自身に沿った右カン拡張が自身な時に得られる monad)
- Jacobs: Adjont Monad between  $\mathbf{EMod}$ ,  $\mathbf{Meas}$   
(随伴関手対を合成して得られる monad)

モナドなので Kleisli 圏と Eilenberg-Moore 圏とその間の随伴が直ちに手に入るが、

- KI 圏: マルコフ写像 (条件付き確率) の圏
- EM 圏: 「平均」演算を備える代数系の圏

のようなものになる。有限可測空間に制限すれば EM 圏は  $\mathbf{Conv}$  そのもの。

# -その他物理っぽい概念

圏による操作的理論と量子論

松久 勝彦

ふんわり問題意識

それはそもそも問題なのか？  
なぜ圏を持ち込みたいか？

概念ズ

圏論  
モノイド圏  
その他物理っぽい概念

量子論と圏

そもその量子力学  
CQM とモノイド圏  
Effect と凸空間

物理に圏は使えるのか

文献案内

Jacobs(2015) による Giry モナドとは次のこと。

## Theorem

次は双対随伴。

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Meas}}(-, [0, 1]) : \mathbf{Meas} \rightarrow \omega\mathbf{EMod}^{op} \quad (31)$$

$$\mathrm{Hom}_{\omega\mathbf{EMod}}(-, [0, 1]) : \omega\mathbf{EMod}^{op} \rightarrow \mathbf{Meas} \quad (32)$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Meas}}(-, [0, 1]) \dashv \mathrm{Hom}_{\omega\mathbf{EMod}}(-, [0, 1]) \quad (33)$$

Giry モナドは  $\mathrm{Hom}_{\omega\mathbf{EMod}}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{Meas}}(-, [0, 1]), [0, 1])$  に等しい。

※  $\omega\mathbf{EMod}$  は  $\mathbb{V}$  の可算和が定義される部分圏

※  $\Sigma_-$  は  $\sigma$  代数の非交差和による Effect 代数

# 量子論と圏

圏による操作的理論と量子論

松久 勝彦

ふんわり問題意識

それはそもそも問題なのか？

なぜ圏を持ち込みたいか？

概念ズ

圏論

モノイド圏

その他物理っぽい概念

量子論と圏

そもそもの量子力学

CQM とモノイド圏

Effect と凸空間

物理に圏は使えるのか

文献案内

量子力学のお話と、そこに圏の語法を持ち込む取り組みの幾つかを見てみる。

# -そもそもの量子力学

圏による操作的理論と量子論

松久 勝彦

ふんわり問題意識

それはそもそも問題なのか？  
なぜ圏を持ち込みた  
いか？

概念ズ

圏論  
モノイド圏  
その他物理っぽい概念

量子論と圏

そもそもの量子力学  
CQM とモノイド圏  
Effect と凸空間

物理に圏は使えるのか

文献案内

## 標準的な量子論

- 量子系にはヒルベルト空間が対応する。
- 物理量は PVM(resp.POVM) で表現される。
- 状態は射線 (resp. 密度行列) で表現される。
- 確率はボルン規則  $P(A|\phi, E(-)) = \langle \phi, E(A)\phi \rangle$   
(resp.  $P(A|\rho, M(-)) = \text{Tr}\rho M(A)$ )
- 系の合成はテンソル積
- 系の発展/変換はユニタリー作用素 (resp.CPTP)

※ PVM/POVM:測定値  $\sigma$  代数から  $\text{Eff}(\mathcal{H})$  への準同型

※密度行列:トレース 1 正作用素。※ CPTP:トレースクラス作用素間の正写像で、自明な随伴系を合成しても正值性が保たれるもの。

# 標準的な量子論

圏による操作的理論と量子論

松久 勝彦

ふんわり問題意識

それはそもそも問題なのか？

なぜ圏を持ち込みた  
いか？

概念ズ

圏論

モノイド圏

その他物理っぽい概念

量子論と圏

そもそもの量子力学

CQM とモノイド圏

Effect と凸空間

物理に圏は使えるのか

文献案内

以上は天降りであるが、いくつかの仕様は「理にかなって」  
いる。

- 密度行列:ボルン規則をトレースで書きなおして凸包をとることを考えると自然。

$$\langle \phi, -\phi \rangle = \text{Tr}(|\phi\rangle\langle\phi| -)$$

- CPTP:状態から状態の写像なのでトレースと正值性は保たれるべき。

圏による操作  
的理論と量  
子論

松久 勝彦

ふんわり問題  
意識

それはそもそも問題な  
のか？  
なぜ圏を持ち込みた  
いか？

概念ズ

圏論  
モノイド圏  
その他物理っぽい概念

量子論と圏

そもそもの量子力学  
CQM とモノイド圏  
Effect と凸空間

物理に圏は使  
えるのか

文献案内

CQM(Categorical Quantum Mechanics)  
Abramsky, Coecke らが 2008 年ごろから仕掛けだした、QM を  
適当な圏の上で再現する話。

基本的な作業：

(有限次元)QM を通常の  $\mathbf{FdHilb}$  ではなく、その抽象化である  $\dagger$ Compact Closed Category(DCCC) で展開する。

対称モノイド圏に加えて、

- 「逆操作」 $\dagger$
- 「双対系」 $(-)^*$  とそれによるモノイダル「閉」構造

を追加したもの。これはそれぞれ  $\mathbf{FdHilb}$  の

- 共役作用素
- 双対空間

をそのまま抽象化したもの。

## DCCC とは

- 対称モノイド圏で、
- 全ての対象に" Dual" があり、
- † 関手を持ち、

それら全ての性質が両立するもの。

## DCCC とは

- 対称モノイド圏で、
- 全ての対象に "Dual" があり、
- $\dagger$  関手を持ち、

それら全ての性質が両立するもの。

⇒ 圏としては性質が多く、

射の計算を一次元の数式で行うのが厳しくなってくるので、

実際の計算は (Selinger(2009)[arxiv:0908.3347]) を用いる。

※ $\uparrow$ には**多くのモノイド圏の定義/例/効率的記法**が載っている。読みやすい。

※ $\uparrow$ CQM には必須。普通の有限次元 QM でも使える。

**FdHilb** から DCCC へ抽象化するとは？

QM のボキャブラリーを、次を守って移植すること。

- 一般の DCCC で意味のある言葉のみを使う
- **FdHilb** で解釈した時は QM でのいつもの概念に同値

## Definition

DCCC における  $\dagger$  フロベニウスモノイド (DFm) とは  $A, m : A \otimes A \rightarrow A, \delta : I \rightarrow A$  で、 $A, m, \delta$  がモノイド、 $A, m^\dagger, \delta^\dagger$  がコモノイドで、さらにフロベニウス恒等式

$$(\text{id} \otimes m)(m^\dagger \otimes \text{id}) \quad (34)$$

$$= (m \otimes \text{id})(\text{id} \otimes m^\dagger) \quad (35)$$

$$= mm^\dagger \quad (36)$$

を満たすもの。加えて  $m^\dagger m = \text{id}$  ならスペシャル (SpDFm)、 $m\sigma = m$  なら可換 (cSpDFm) とよぶ。

※  $\sigma$  は対称モノイド構造の自然変換

※この定義はいつでもよいので Graphical Language を描く。

**FdHilb** にて、正規直交基底  $\{|\phi\rangle_i\}_i$  があるとき次のような構成で  $cSpDfm$  を作れる。

$$m \quad :: \quad |\phi\rangle_i \otimes |\phi\rangle_k \mapsto \delta_{ij} |\phi\rangle_i \quad (37)$$

$$\delta \quad :: \quad |\phi\rangle_i \mapsto 1 \quad (38)$$

## Theorem

**FdHilbcSpDfm** は常に上記の形になる。  
(Ckecke, Vicary(2008))

大雑把な原理：可換  $C^*$  環構造が入るので、GN 双対。

次がなりたつことが知られている。

## Theorem

対称モノイド圏の可換コモノイド対象とその準同型による部分圏は、 $\otimes$  を積  $\times$  としてもつ積圏

今の状況に即して大胆に言い換えると次が言える

## Corollary

DCCC の  $cSpDfm$  部分圏は複製/消去自然変換をもつ。

※  $D : f \mapsto f \otimes f$  を複製関手、 $E : f \mapsto id_I$  を消去関手として、 $\delta : id_{\mathbb{C}} \rightarrow D, \epsilon : id_{\mathbb{C}} \rightarrow E$  を複製、消去自然変換という。一般に量子力学では複製や消去ができず、それはもっぱら古典的性質と考えられているので、CQM 界限では  $cSpDfm$  やそれに準じたものを「古典的対象」と呼んでいる。

古典的対象が手に入ったので、いろんなことを考えることができる。

## Corollary

$A$  を古典的対象とする。 $(A \otimes -)$  はモナドかつコモナド

## Corollary

$A$  を  $DCCC$  上の古典的対象とする。 $(A \otimes -)$  の *Kleisli* 圏は再び  $DCCC$

## Corollary

$A$  を古典的対象、 $m : B \otimes B^* \rightarrow A$  をモノイド準同型で  $m^{\dagger*} = m$  であるとき、 $m$  は PVM

「作用素環  $B(\mathcal{C})$  への  $*$  準同型は PVM」の軽量版。

DCCC から次の構成で新しい圏をつくる。(CP 構成)

$$Ob_{CP} = \{A \otimes A^* | A \in Ob\} \quad (39)$$

$$Ar_{CP} = \{(\text{id}_B \otimes \epsilon_C \otimes \text{id}_B)(f \otimes f_*) | f \in \text{Hom}(A, B \otimes C)\} \quad (40)$$

これは何か？ 次の Kraus 定理によって、これは CompletePositive

## Theorem

**FdHilb** 完全正写像  $\mathcal{I}$  に対して、線形写像の族  $\{F_i\}_i$  があって、 $\mathcal{I}(-) = \sum_i F_i(-)F_i^\dagger$

これ自体を Graphical Language で示すこともできる。

古典的対象  $A$  ストレージの Kleisli 圏と、CP 構成を組み合わせると POVM が手に入る。

## Corollary

$\mathbf{FdHilb}$  で、 $CP(Kl(A \otimes -))$  の射は規格化を除き  $POVM$

## CQM の不満:

- 概念は確かに整理されるが、単に抽象化しただけ
- DCCC は  $\mathbf{FdHilb}$  を参考にしているので当たり前
- 有限次元の話しかできない
- 物理的に新しいことがわかるわけではない
- 「QM の正当化」にはまた別の工夫がいる

でも

- **Graphical Language は便利!**
- 今度 QM 新概念作るときは DCCC の言葉で作ろう
- 有限次元量子系の計算も DCCC の式でやろう

# (脱線:OPT の試み)

圏による操作的理論と量子論

松久 勝彦

ふんわり問題意識

それはそもそも問題なのか？

なぜ圏を持ち込みたいか？

概念ズ

圏論

モノイド圏

その他物理っぽい概念

量子論と圏

そもそもの量子力学

CQM とモノイド圏

Effect と凸空間

物理に圏は使えるのか

文献案内

OPT:Operational Probabilistic Theory

(または GPT:Generalized Probabilistic Theory)

は、色々な流儀があるが、大体次のような語法からなる。

# (脱線:OPT の試み)

OPT:Operational Probabilistic Theory

(または GPT:Generalized Probabilistic Theory)

は、色々な流儀があるが、大体次のような語法からなる。

- 状態のなす凸空間（確率混合が許容される）

圏による操作的理論と量子論

松久 勝彦

ふんわり問題意識

それはそもそも問題なのか？

なぜ圏を持ち込みたいか？

概念ズ

圏論

モノイド圏

その他物理っぽい概念

量子論と圏

そもそもの量子力学

CQM とモノイド圏

Effect と凸空間

物理に圏は使えるのか

文献案内

# (脱線:OPT の試み)

圏による操作的理論と量子論

松久 勝彦

ふんわり問題意識

それはそもそも問題なのか？  
なぜ圏を持ち込みたいか？

概念ズ

圏論  
モノイド圏  
その他物理っぽい概念

量子論と圏

そもそもの量子力学  
CQM とモノイド圏  
Effect と凸空間

物理に圏は使えるのか

文献案内

OPT:Operational Probabilistic Theory

(または GPT:Generalized Probabilistic Theory)

は、色々な流儀があるが、大体次のような語法からなる。

- 状態のなす凸空間（確率混合が許容される）
- 事象のなす Effect-mod(状態のアファイン双対)

# (脱線:OPT の試み)

圏による操作的理論と量子論

松久 勝彦

ふんわり問題意識

それはそもそも問題なのか？  
なぜ圏を持ち込みたいか？

概念ズ

圏論  
モノイド圏  
その他物理っぽい概念

量子論と圏

そもそもの量子力学  
CQM とモノイド圏  
Effect と凸空間

物理に圏は使えるのか

文献案内

OPT:Operational Probabilistic Theory

(または GPT:Generalized Probabilistic Theory)

は、色々な流儀があるが、大体次のような語法からなる。

- 状態のなす凸空間（確率混合が許容される）
- 事象のなす Effect-mod(状態のアファイン双対)
- 状態と事象を eval するとその確率が手に入るものとする。

# (脱線:OPT の試み)

圏による操作的理論と量子論

松久 勝彦

ふんわり問題意識

それはそもそも問題なのか？  
なぜ圏を持ち込みた  
いか？

概念ズ

圏論  
モノイド圏  
その他物理っぽい概念

量子論と圏

そもそもの量子力学  
CQM とモノイド圏  
Effect と凸空間

物理に圏は使えるのか

文献案内

OPT:Operational Probabilistic Theory

(または GPT:Generalized Probabilistic Theory)

は、色々な流儀があるが、大体次のような語法からなる。

- 状態のなす凸空間（確率混合が許容される）
- 事象のなす Effect-mod(状態のアファイン双対)
- 状態と事象を eval するとその確率が手に入るものとする。
- 系やプロセスの並列や連結ができる（モノイド圏）。

# (脱線:OPT の試み)

圏による操作的理論と量子論

松久 勝彦

ふんわり問題意識

それはそもそも問題なのか？  
なぜ圏を持ち込みたいか？

概念ズ

圏論  
モノイド圏  
その他物理っぽい概念

量子論と圏

そもそもの量子力学  
CQM とモノイド圏  
Effect と凸空間

物理に圏は使えるのか

文献案内

OPT:Operational Probabilistic Theory

(または GPT:Generalized Probabilistic Theory)

は、色々な流儀があるが、大体次のような語法からなる。

- 状態のなす凸空間（確率混合が許容される）
- 事象のなす Effect-mod(状態のアフィン双対)
- 状態と事象を eval するとその確率が手に入るものとする。
- 系やプロセスの並列や連結ができる（モノイド圏）。
- Non-signaling や Local-tomography 等の性質を要求する。

# (脱線:OPT の試み)

圏による操作的理論と量子論

松久 勝彦

ふんわり問題意識

それはそもそも問題なのか？  
なぜ圏を持ち込みたいか？

概念ズ

圏論  
モノイド圏  
その他物々しい概念

量子論と圏

そもそもの量子力学  
CQM とモノイド圏  
Effect と凸空間

物理に圏は使えるのか

文献案内

OPT:Operational Probabilistic Theory

(または GPT:Generalized Probabilistic Theory)

は、色々な流儀があるが、大体次のような語法からなる。

- 状態のなす凸空間（確率混合が許容される）
- 事象のなす Effect-mod(状態のアファイン双対)
- 状態と事象を eval するとその確率が手に入るものとする。
- 系やプロセスの並列や連結ができる（モノイド圏）。
- Non-signaling や Local-tomography 等の性質を要求する。

適当な公理を満たす系のクラスが、QM の通常のヒルベルト空間のフォーマットに帰着することを示そうとする。

示せたら「なぜ QM がこのような姿をしているのか」についての答えになる。

# (脱線:OPT の試み)

圏による操作的理論と量子論

松久 勝彦

ふんわり問題意識

それはそもそも問題なのか？  
なぜ圏を持ち込みたいか？

概念ズ

圏論  
モノイド圏  
その他物っばい概念

量子論と圏

そもそもの量子力学  
CQM とモノイド圏  
Effect と凸空間

物理に圏は使えるのか

文献案内

OPT:Operational Probabilistic Theory

(または GPT:Generalized Probabilistic Theory)

は、色々な流儀があるが、大体次のような語法からなる。

- 状態のなす凸空間（確率混合が許容される）
- 事象のなす Effect-mod(状態のアファイン双対)
- 状態と事象を eval するとその確率が手に入るものとする。
- 系やプロセスの並列や連結ができる（モノイド圏）。
- Non-signaling や Local-tomography 等の性質を要求する。

適当な公理を満たす系のクラスが、QM の通常のヒルベルト空間のフォーマットに帰着することを示そうとする。

示せたら「なぜ QM がこのような姿をしているのか」についての答えになる。

⇒ **スマートな公理で証明すればするほどつよい**

# (脱線:OPTの試み)

圏による操作的理論と量子論

松久 勝彦

ふんわり問題意識

それはそもそも問題なのか？  
なぜ圏を持ち込みた  
いか？

概念ズ

圏論  
モノイド圏  
その他物理っぽい概念

量子論と圏

そもそもの量子力学  
CQM とモノイド圏  
Effect と凸空間

物理に圏は使えるのか

文献案内

OPT アプローチによる公理の例：

Müller, Masanes [arxiv:1004.1483]

- Local-Tomography: 合成系はテンソル積
- 確実に識別出来る状態数最大を「容量」とし、容量の大小に応じた系の埋め込みができる。
- 純粋状態 (状態の端点) は互いに変換できる。  
⇒ 純粋状態に推移的作用する位相群がある。
- (状態のアフィン双対は全て事象である)

この時、状態凸空間の次元は容量  $c$  に対して

$d_c = c^r - 1$  ( $r = 1, 2$ ) に限られ、

$r = 1$  が古典的な有限確率空間、 $r = 2$  が量子的な密度行列に埋め込まれることが示される。

元々はプログラム意味論の分野で、  
プログラム  $P: A \rightarrow B$  の意味論として

- データ B 上の事後条件から  $\rightarrow$  データ A 上の事前条件  
への変換
- データ A から  $\rightarrow$  データ B への変換

の二種類があって、これが双対随伴だという観察があった。  
この「述語と状態の双対」は一般性があるように見える。

- データについての述語変換  $\Rightarrow$  **EMod**
- データとその変換  $\Rightarrow$  **Conv**

と一般化して、次の双対随伴がある。

## Effect 随伴

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Conv}}(-, [0, 1]) : \mathbf{Conv} \rightarrow \mathbf{EMod}^{op} \quad (41)$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{EMod}}(-, [0, 1]) : \mathbf{EMod}^{op} \rightarrow \mathbf{Conv} \quad (42)$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Conv}}(-, [0, 1]) \dashv \mathrm{Hom}_{\mathbf{EMod}}(-, [0, 1]) \quad (43)$$

ただし、

$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Conv}} A[0, 1]$  の  $\otimes$  は  $[0, 1]$  の  $\otimes$  から pointwise に入れる。  
 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{EMod}} -[0, 1]$  の  $c_p$  は  $[0, 1]$  の  $c_p$  から pointwise に入れる。

非常に一般的な関係なので、様々なところに現れる。

## Effect 随伴

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Conv}}(-, [0, 1]) : \mathbf{Conv} \rightarrow \mathbf{EMod}^{op} \quad (41)$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{EMod}}(-, [0, 1]) : \mathbf{EMod}^{op} \rightarrow \mathbf{Conv} \quad (42)$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Conv}}(-, [0, 1]) \dashv \mathrm{Hom}_{\mathbf{EMod}}(-, [0, 1]) \quad (43)$$

ただし、

$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Conv}} A[0, 1]$  の  $\otimes$  は  $[0, 1]$  の  $\otimes$  から pointwise に入れる。  
 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{EMod}} -[0, 1]$  の  $c_p$  は  $[0, 1]$  の  $c_p$  から pointwise に入れる。

非常に一般的な関係なので、様々なところに現れる。

Q. この随伴にはどんな（物理的）意味があるだろうか？

## 具体例 1 :

OPT のように、状態の凸空間と、そこから確率  $[0, 1]$  へのアファイン関数となる「測定事象」（例えば測定器を固定して、その測定値集合の可測集合）を用いる操作的/統計的理論は、大体次のようなことをする。

- どんな事象を使っても識別出来ない状態を同一視して商をとる。
- その同値類を線形空間のアファイン集合として表現する。

※単なる凸空間だと、何も構造が入っていないので、数学的操作が何もできない。

(例えば D'ariano, Perinotti, Chiribella(2010)/Müller/Masanes(2010)/Holevo(1981))



# -Effect, Convex

圏による操作的理論と量子論

松久 勝彦

ふんわり問題意識

それはそもそも問題なのか？  
なぜ圏を持ち込みた  
いか？

概念ズ

圏論  
モノイド圏  
その他物理っぽい概念

量子論と圏

そもそもの量子力学  
CQM とモノイド圏  
Effect と凸空間

物理に圏は使えるのか

文献案内

Effect 随伴の普遍射は次のような物である。  
(一般に随伴は普遍射の存在と同値である)

$$\eta_A : A \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{EMod}}(\text{Hom}_{\mathbf{Conv}}(A, [0, 1]), [0, 1]) \quad (44)$$

$$\text{:: } x \mapsto (\lambda \phi. \phi(x)) \quad (45)$$

これは先の状態商への写像である

# -Effect, Convex

圏による操作的理論と量子論

松久 勝彦

ふんわり問題意識

それはそもそも問題なのか？  
なぜ圏を持ち込みたいのか？

概念ズ

圏論  
モノイド圏  
その他物理っぽい概念

量子論と圏

そもそもの量子力学  
CQM とモノイド圏  
Effect と凸空間

物理に圏は使えるのか

文献案内

Effect 随伴の普遍射は次のような物である。  
(一般に随伴は普遍射の存在と同値である)

$$\eta_A : A \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{EMod}}(\text{Hom}_{\mathbf{Conv}}(A, [0, 1]), [0, 1]) \quad (44)$$

$$\because x \mapsto (\lambda \phi. \phi(x)) \quad (45)$$

これは先の状態商への写像である

この普遍性は  $\forall f : A \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{EMod}}(X, [0, 1])$  に対して、

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\eta_A} & \text{Hom}(\text{Hom}(A, [0, 1]), [0, 1]) & \text{Hom}(A, [0, 1]) & (46) \\ & \searrow f & \downarrow & \downarrow & \\ & & \text{Hom}(X, [0, 1]) & X & \end{array}$$

$A$  を  $\mathbf{EMod}$  双対に表現するものの中で「最良」である。

# -Effect, Convex

圏による操作  
的理論と量  
子論

松久 勝彦

ふんわり問題  
意識

それはそもそも問題な  
のか？

なぜ圏を持ち込みた  
いか？

概念ズ

圏論

モノイド圏

その他物理っぽい概念

量子論と圏

そもそもの量子力学

CQM とモノイド圏

Effect と凸空間

物理に圏は使  
えるのか

文献案内

具体例 2 :

「量子測定は POVM」だったが…

具体例 2 :

「量子測定は POVM」だったが…

Q. それはなぜか？

具体例 2 :

「量子測定は POVM」だったが…

Q. それはなぜか？

「量子状態は密度行列」を認めておくと  
測定プロセスとは…

具体例 2 :

「量子測定は POVM」だったが…

Q. それはなぜか？

「量子状態は密度行列」を認めておくと  
測定プロセスとは…

状態空間  $\rightarrow$  測定器の  $\sigma$  代数上の測度の空間

$$\text{測定プロセス} : \text{DM}(\mathcal{H}) \rightarrow G'(X) \in \mathbf{Conv} \quad (47)$$

要するに  $\text{Hom}(\text{DM}(\mathcal{H}), G'(X))$  のこと。

※  $\text{DM}(\mathcal{H})$  は密度行列

※  $G'(X)$  は確率測度のなす凸空間 (Giry とは型が違う)

$$G'(X) = \text{Hom}_{\omega\mathbf{EAlg}}(\Sigma_X, [0, 1])$$

※  $\Sigma_{(-)} : \mathbf{Meas} \rightarrow \mathbf{EAlg}^{op}$  は

可測集合の非交和を  $\otimes$  とする関手

ここで、次が成り立っている。

Jacobs(2015)

$E$  を可算 Effect-mod、 $X$  を可測空間として、右カン余拡張を伴うつぎの自然同型がある。

$$\mathrm{Hom}_{\omega\mathbf{EAlg}}(\Sigma_X, U(E)) \quad (48)$$

$$\simeq \mathrm{Hom}_{\omega\mathbf{EMod}}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{Meas}}(X, [0, 1]), E) \quad (49)$$

※  $U : \mathbf{EMod} \rightarrow \mathbf{EAlg}$  は module 構造の忘却関手

これと Effect 随伴を用いることで、次の Hom 自然同型が得られる。

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Conv}}(\mathrm{DM}(\mathcal{H}), G'(X)) \quad (50)$$

$$\simeq \mathrm{Hom}(\mathrm{DM}(\mathcal{H}), \mathrm{Hom}_{\omega\mathbf{EMod}}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{Meas}}(X, [0, 1]), [0, 1])) \quad (51)$$

$$\simeq \mathrm{Hom}_{\omega\mathbf{EMod}}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{Meas}}(X, [0, 1]), \mathrm{Hom}(\mathrm{DM}(\mathcal{H}), [0, 1])) \quad (52)$$

$$\simeq \mathrm{Hom}_{\omega\mathbf{EAlg}}(\Sigma_X, U(\mathrm{Hom}(\mathrm{DM}(\mathcal{H}), [0, 1]))) \quad (53)$$

ここで  $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Conv}}(\mathrm{DM}(\mathcal{H}), [0, 1])$  は、密度行列のアフィン双対空間だが、ようするに  $\mathrm{Eff}(\mathcal{H}) = \{E \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \mid 0 \leq E \leq 1\}$  のことである。

これと Effect 随伴を用いることで、次の Hom 自然同型が得られる。

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Conv}}(\mathrm{DM}(\mathcal{H}), G'(X)) \quad (50)$$

$$\simeq \mathrm{Hom}(\mathrm{DM}(\mathcal{H}), \mathrm{Hom}_{\omega\mathbf{EMod}}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{Meas}}(X, [0, 1]), [0, 1])) \quad (51)$$

$$\simeq \mathrm{Hom}_{\omega\mathbf{EMod}}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{Meas}}(X, [0, 1]), \mathrm{Hom}(\mathrm{DM}(\mathcal{H}), [0, 1])) \quad (52)$$

$$\simeq \mathrm{Hom}_{\omega\mathbf{EAlg}}(\Sigma_X, U(\mathrm{Hom}(\mathrm{DM}(\mathcal{H}), [0, 1]))) \quad (53)$$

ここで  $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Conv}}(\mathrm{DM}(\mathcal{H}), [0, 1])$  は、密度行列のアフィン双対空間だが、ようするに  $\mathrm{Eff}(\mathcal{H}) = \{E \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \mid 0 \leq E \leq 1\}$  のことである。

最後のホムセットは POVM にほかならない。

# -Effect, Convex

圏による操作  
的理論と量  
子論

松久 勝彦

ふんわり問題  
意識

それはそもそも問題な  
のか？  
なぜ圏を持ち込みた  
いか？

概念ズ

圏論  
モノイド圏  
その他物理っぽい概念

量子論と圏

そもそもの量子力学  
CQM とモノイド圏  
Effect と凸空間

物理に圏は使  
えるのか

文献案内

これは何が言えたことになるのか？

これは何が言えたことになるのか？

「量子状態が密度行列で書かれる」  
⇒ 「測定プロセスは POVM」

というのが、一般的な知見のみから従う。

この Effect 随伴は、

「測定プロセス」概念の実装が何であるべきかを強く統制している。

# 物理に圏は使えるのか

圏による操作  
的理論と量  
子論

松久 勝彦

ふんわり問題  
意識

それはそもそも問題な  
のか？  
なぜ圏を持ち込みた  
いか？

概念ズ

圏論  
モノイド圏  
その他物理っぽい概念

量子論と圏

そもそもの量子力学  
CQM とモノイド圏  
Effect と凸空間

物理に圏は使  
えるのか

文献案内

反省：

圏の語法の援用例として CQM と Effect 随伴を見てきたが…

# 物理に圏は使えるのか

圏による操作  
的理論と量  
子論

松久 勝彦

ふんわり問題  
意識

それはそもそも問題な  
のか？  
なぜ圏を持ち込みた  
いか？

概念ズ

圏論  
モノイド圏  
その他物理っぽい概念

量子論と圏

そもそもの量子力学  
CQM とモノイド圏  
Effect と凸空間

物理に圏は使  
えるのか

文献案内

反省：

圏の語法の援用例として CQM と Effect 随伴を見てきたが…

単に既知のことを圏で書いただけ…？

# 物理に圏は使えるのか

圏による操作的理論と量子論

松久 勝彦

ふんわり問題意識

それはそもそも問題なのか？  
なぜ圏を持ち込みたいか？

概念ズ

圏論  
モノイド圏  
その他物理っぽい概念

量子論と圏

そもそもの量子力学  
CQM とモノイド圏  
Effect と凸空間

物理に圏は使えるのか

文献案内

反省：

圏の語法の援用例として CQM と Effect 随伴を見てきたが…

単に既知のことを圏で書いただけ…？

- 圏で物理を語っていくには、具体例がまだまだ足りない

# 物理に圏は使えるのか

圏による操作的理論と量子論

松久 勝彦

ふんわり問題意識

それはそもそも問題なのか？  
なぜ圏を持ち込みたいか？

概念ズ

圏論  
モノイド圏  
その他物理っぽい概念

量子論と圏

そもそもの量子力学  
CQM とモノイド圏  
Effect と凸空間

物理に圏は使えるのか

文献案内

反省：

圏の語法の援用例として CQM と Effect 随伴を見てきたが…

単に既知のことを圏で書いただけ…？

- 圏で物理を語っていくには、具体例がまだまだ足りない
- 全部が全部圏で書ける保証はない

# 物理に圏は使えるのか

圏による操作的理論と量子論

松久 勝彦

ふんわり問題意識

それはそもそも問題なのか？  
なぜ圏を持ち込みたいか？

概念ズ

圏論  
モノイド圏  
その他物理っぽい概念

量子論と圏

そもそもの量子力学  
CQM とモノイド圏  
Effect と凸空間

物理に圏は使えるのか

文献案内

反省：

圏の語法の援用例として CQM と Effect 随伴を見てきたが…

単に既知のことを圏で書いただけ…？

- 圏で物理を語っていくには、具体例がまだまだ足りない
- 全部が全部圏で書ける保証はない
- どの水準で圏を使うかもまちまち

# 物理に圏は使えるのか

圏による操作的理論と量子論

松久 勝彦

ふんわり問題意識

それはそもそも問題なのか？  
なぜ圏を持ち込みたいか？

概念ズ

圏論  
モノイド圏  
その他物理っぽい概念

量子論と圏

そもそもの量子力学  
CQM とモノイド圏  
Effect と凸空間

物理に圏は使えるのか

文献案内

反省：

圏の語法の援用例として CQM と Effect 随伴を見てきたが…

単に既知のことを圏で書いただけ…？

- 圏で物理を語っていくには、具体例がまだまだ足りない
- 全部が全部圏で書ける保証はない
- どの水準で圏を使うかもまちまち
- 単に圏で書くだけでなく、もっと確固たる「理論 hogehoge が fugafuga な理由を確かめる」等の、具体的なモチベーションを保ってやっていく必要性がある。

# 物理に圏は使えるのか

圏による操作的理論と量子論

松久 勝彦

ふんわり問題意識

それはそもそも問題なのか？  
なぜ圏を持ち込みたいか？

概念ズ

圏論  
モノイド圏  
その他物理っぽい概念

量子論と圏

そもそもの量子力学  
CQM とモノイド圏  
Effect と凸空間

物理に圏は使えるのか

文献案内

## まとめ

- モノイド圏はいいぞ
- Effect 随伴はいいぞ
- もっといろんな例が欲しいぞ

# 文献(というか人)案内

圏による操作的理論と量子論

松久 勝彦

ふんわり問題意識

それはそもそも問題なのか？  
なぜ圏を持ち込みたいか？

概念ズ

圏論  
モノイド圏  
その他物理っぽい概念

量子論と圏

そもそもの量子力学  
CQM とモノイド圏  
Effect と凸空間

物理に圏は使えるのか

文献案内

## ■ CQM

- Coecke,Abramsky:arxiv:0808.1023
- Coecke,Pavlovic,Vicary:arxiv:0810.0812
- Coecke,Heunen,Kissinger:arxiv:1305.3821
- Oxford Quantum Group の以下の人たちで arxiv  
B.Coecke,S.Abramsky,C.Heinen,P.Selinger

## ■ Effectus

- Foulis,Bennet:Found.Phys.24(1994),1-331—1-352.
- Radboud の B.Jacobs 氏まわりの人が精力的に書いている:

## ■ OPT,Giry モナド等

- M.Giry:Lecture Notes in Math.915,p.68—85
- T.Avery:arxiv:1410.4432
- K.Sturtz:arxiv:1406.6030
- Müller,Masanes:arxiv:1004.1483
- B.Jacobs:ENTCS vol.319(2015)p.239-253