エンチャント基礎論 βVer

＜例題＞

最初，世界の左端に居るあなたは，世界の右端に行きたいと思います．表裏の出る確率が同様に確からしいコインを 1 回投げて，表が出れば世界の真ん中に移動でき，更に続けて表が出れば，無事世界の右端に到着でき人生を謳歌する事が出来ます．しかし，あなたが真ん中の世界に居るときに，コインの裏が出てしまうと，振り出しに逆戻り！あなたは左の世界へと戻ってしまい過酷な労働を課せられる事になります．

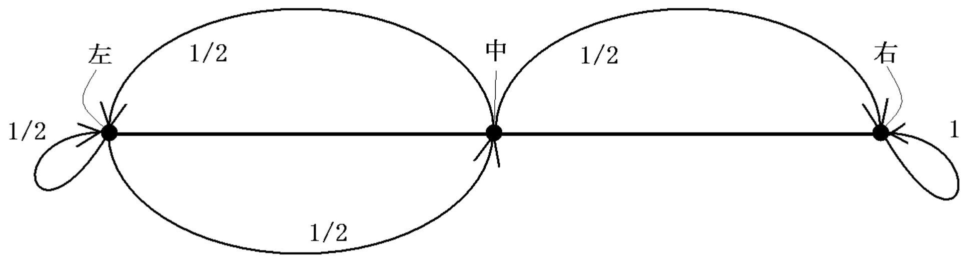
さて，今あなたはn回（$n \in \mathbf{N}$）コインを振り終えたところです．あなたが世界の右端に存在している確率をもとめろ．

＜解説付解答 1＞行列を用いた解答．解答の全てを理解するには，**大学数学(線形代数)の知識が必要**ですが，難関校や医学部受験者知っておいたほうが良い内容ですので，ここでさらっと勉強しておくと良いかもしれません．高校数学の範囲でも理解できる＜解答 2＞と比較すれば興味深いですよ～♪あと，一番重要なこと良い忘れましたが，**この解法こそが今回の講義の確信**といっても良いかもしれません．そのほかはエクセルや Scilab の使い方の問題ですので．では，以下，解答例です．

確率をこのようにおくのが最初の重要ポイント！

[解]

n回コインを投げて，左の世界，真ん中の世界，右の世界に居る確率をそれぞれ$P_n^{左}$，$P_n^{中}$，$P_n^{右}$とおく．ある世界から別の世界へ移る様子は，次図のように表される．



例えば，n回目に左の世界にいるとき，$n+1$回目には半々の確率で再び左の世界に居るか真ん中の世界に移る，という事をあらわしている．したがって，次のように漸化式を立てる事が出来る．

$$P_{n+1}^{左}=\frac{1}{2}P_n^{左}+\frac{1}{2}P_n^{中},\quad P_{n+1}^{中}=\frac{1}{2}P_n^{左},\quad P_{n+1}^{右}=\frac{1}{2}P_n^{中}+P_n^{右}\cdots①.$$

↑忘れやすいかも!?

初期条件は,

$$P_1^{左}=\frac{1}{2},\quad P_1^{中}=\frac{1}{2},\quad P_1^{右}=0\cdots②$$

となる．さて，①，②を行列で表すと,

$$\begin{pmatrix} p_{n+1}^{左} \\ p_{n+1}^{中} \\ p_{n+1}^{右} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_n^{左} \\ p_n^{中} \\ p_n^{右} \end{pmatrix}\cdots①',\quad \begin{pmatrix} P_1^{左} \\ P_1^{中} \\ P_1^{右} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}\cdots②'.$$

便宜上 $\vec{P}_n \equiv \begin{pmatrix} p_n^{左} \\ p_n^{中} \\ p_n^{右} \end{pmatrix}$, $\mathrm{A} \equiv \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ とおくと, $\vec{P}_{n+1}=A\vec{P}_n$ となるので, この関係を繰り返し用いて, $\vec{P}_{n+1}=A^n\vec{P}_1$

となる．

（つまり，A^nを求める問題へとすり替わったわけです．さて，3 次行列のn乗を求めるのは高校数学の範囲を超えているのですが，できるだけ詳しく解説しますが，その解説が気に入らない人はこの辺のサイトや専門書で勉強してください．3 次程度の行列のn乗を求める作業は，2 次方程式の解の公式のように，その大半があらかじめ決められた手法に従って求める事が出来ます．ただ，解の公式とは比較にならないくらい

計算量や作業が多いです．今回は解説付きで進めます．）

k を定数，$\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ （x_1, x_2, x_3は$x_1x_2x_3\neq 0$を満たす定数）とし次の式が成立していると仮定する．

$$A\vec{x}=(kE)\vec{x}$$

これを変形して，

$$(A-kE)\vec{x}=\vec{0}\cdots③$$

ここで，仮に$\det(A-kE)\neq 0$，即ち行列$A-kE$が逆行列$(A-kE)^{-1}$を持つとすれば，それを③の左側から掛ける事で $\vec{x}=\vec{0}$ という結果が導かれるが，これは$x_1x_2x_3\neq 0$に反する．したがって，$\det(A-kE)\neq 0$は誤り，即ち$\det(A-kE)=0$である．したがって，

$$\det(A-kE)=\begin{vmatrix}\frac{1}{2}-k & \frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & -k & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 1-k\end{vmatrix}=\left(\frac{1}{2}-k\right)(-k)(1-k)-(1-k)\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=0$$

行列式計算はクラメールの方法を用いた．

$$\Leftrightarrow\ k=1,\ \frac{1\pm\sqrt{5}}{4}\left(\alpha=\frac{1-\sqrt{5}}{4},\quad \beta=\frac{1+\sqrt{5}}{4}\text{とおく}\right).$$

得られたkの値を③に代入する事で，次の連立方程式が3組得られる．

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ -\frac{1}{2} & -1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\vec{0},\quad \begin{pmatrix}\frac{1}{2}-\alpha & \frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & -\alpha & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 1-\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\vec{0},\quad \begin{pmatrix}\frac{1}{2}-\beta & \frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & -\beta & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 1-\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\vec{0}$$

これらの方程式は不定解を持ち，左の式から順に解くと，次のようになる．ここで，t_1, t_2, t_3は全て定数とする．

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=t_1\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=t_2\begin{pmatrix}2\alpha\\1\\-\frac{\beta^2}{4}\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=t_3\begin{pmatrix}2\beta\\1\\-\frac{\alpha^2}{4}\end{pmatrix}.$$

Cの要素はkの値を順に並べてある．

ここで，更に新しい行列B及び，Cを定義します．

Bの要素は方程式の解をそれぞれのtを1として並べてある．

$$B=\begin{pmatrix}0 & 2\alpha & 2\beta\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & -\frac{\beta^2}{4} & -\frac{\alpha^2}{4}\end{pmatrix},\quad B^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{16} & \frac{1}{8} & 1\\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} & 0\\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} & 0\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \alpha & 0\\ 0 & 0 & \beta\end{pmatrix}$$

（Bの逆行列も必要なので，ついでに求めておきました．）

この計算はかなり大変とだけ言っておきます．

すると，$AB=BC\Leftrightarrow A=BCB^{-1}$なる関係が成立している事が分かります．したがって，この関係式を繰り返し用いる事で，$A^n=BC^nB^{-1}$となります．よって，

$$A^n=\begin{pmatrix}0&2\alpha&2\beta\\0&1&1\\1&-\frac{\beta^2}{4}&-\frac{\alpha^2}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\alpha^n&0\\0&0&\beta^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{16}&\frac{1}{8}&1\\\frac{1}{\sqrt5}&\frac{\sqrt5-1}{2\sqrt5}&0\\-\frac{1}{\sqrt5}&\frac{\sqrt5+1}{2\sqrt5}&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2\alpha&2\beta\\0&1&1\\1&-\frac{\beta^2}{4}&-\frac{\alpha^2}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{16}&\frac{1}{8}&1\\\frac{\alpha^n}{\sqrt5}&\alpha^n\bullet\frac{\sqrt5-1}{2\sqrt5}&0\\-\frac{\beta^n}{\sqrt5}&\beta^n\bullet\frac{\sqrt5+1}{2\sqrt5}&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt5}\left(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}\right)&\alpha^{n+1}\bullet\frac{\sqrt5-1}{\sqrt5}+\beta^{n+1}\bullet\frac{\sqrt5+1}{\sqrt5}&0\\\frac{1}{\sqrt5}\left(\alpha^n-\beta^n\right)&\alpha^n\bullet\frac{\sqrt5-1}{\sqrt5}+\beta^n\bullet\frac{\sqrt5+1}{\sqrt5}&0\\-\frac{1}{16}-\frac{1}{4\sqrt5}\left(\alpha^n\beta^2-\alpha^2\beta^n\right)&\frac{1}{8}-\left(\alpha^n\beta^2\bullet\frac{\sqrt5-1}{\sqrt5}+\alpha^2\beta^n\bullet\frac{\sqrt5+1}{\sqrt5}\right)&1\end{pmatrix}$$

解と係数の関係式なを用いた, 地道な計算をしました.

$$=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt5}\left(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}\right)&\frac{1}{\sqrt5}\left(\alpha^n+\beta^n\right)&0\\\frac{1}{\sqrt5}\left(\alpha^n-\beta^n\right)&\frac{1}{\sqrt5}\left(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1}\right)&0\\-\frac{1}{16}-\frac{1}{64\sqrt5}\left(\alpha^{n-2}-\beta^{n-2}\right)&\frac{1}{8}-\frac{1}{16}\left(\alpha^{n-2}\bullet\frac{\sqrt5-1}{\sqrt5}+\beta^{n-2}\bullet\frac{\sqrt5+1}{\sqrt5}\right)&1\end{pmatrix}$$

したがって， $n\geqq 2$ **で,**

$$\vec{P}_n=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt5}\left(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}\right)&\frac{1}{\sqrt5}\left(\alpha^n+\beta^n\right)&0\\\frac{1}{\sqrt5}\left(\alpha^n-\beta^n\right)&\frac{1}{\sqrt5}\left(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1}\right)&0\\-\frac{1}{16}-\frac{1}{64\sqrt5}\left(\alpha^{n-2}-\beta^{n-2}\right)&\frac{1}{8}-\frac{1}{16}\left(\alpha^{n-2}\bullet\frac{\sqrt5-1}{\sqrt5}+\beta^{n-2}\bullet\frac{\sqrt5+1}{\sqrt5}\right)&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac12\\\frac12\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt5}\left\{\left(\frac{1+\sqrt5}{4}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt5}{4}\right)^{n+1}\right\}\\\frac{1}{\sqrt5}\left\{\left(\frac{1+\sqrt5}{4}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt5}{4}\right)^{n+1}\right\}\\1-\frac{4}{\sqrt5}\left\{\left(\frac{1+\sqrt5}{4}\right)^{n+2}-\left(\frac{1-\sqrt5}{4}\right)^{n+2}\right\}\end{pmatrix}$$

ガチで計算してください．30 分くらい粘れば正しい答えにたどり着けるかな？？？あなたの忍耐力が試される場面ですよ〜♪正直大変すぎです＾＾

（これは， $n=1$ **でも成立する）.**

n **回目ではじめて右に到達する確率を求めればよく，**
その確率 p **は** $n\geqq 2$ **において,**

$$p=P_n^{右}-P_{n\text{-}1}^{右}=1-\frac{4}{\sqrt5}\left\{\left(\frac{1+\sqrt5}{4}\right)^{n+2}-\left(\frac{1-\sqrt5}{4}\right)^{n+2}\right\}-1+\frac{4}{\sqrt5}\left\{\left(\frac{1+\sqrt5}{4}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt5}{4}\right)^{n+1}\right\}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt5}\left\{\left(\frac{1+\sqrt5}{4}\right)^{n-1}-\left(\frac{1-\sqrt5}{4}\right)^{n-1}\right\}$$ （$n=1$ **の時も成立）**

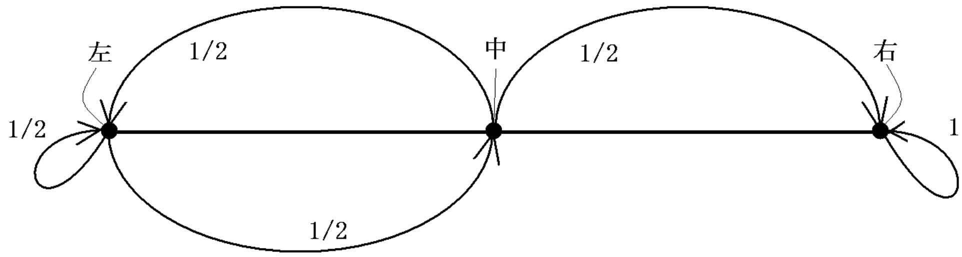
$$\therefore\quad\frac{1}{2\sqrt5}\left\{\left(\frac{1+\sqrt5}{4}\right)^{n-1}-\left(\frac{1-\sqrt5}{4}\right)^{n-1}\right\}$$

＜解説付解答 2＞…行列を用いず，漸化式のみで解く方法. 高校数学の範囲で解くにはこの解が最も素直でしょう. 実は，この解答の方法を一般化して，C などで適切にプログラミングを行えば，わざわざ上述のような行列を用いる必要はありません. しかし，この手の問題（ランダムウォーク問題という）は行列で考えるのが一般的です.

確率をこのようにおくのが最初の重要ポイント！

[解]

n 回コインを投げて，左の世界，真ん中の世界，右の世界に居る確率をそれぞれ $P_n^{左}$， $P_n^{中}$， $P_n^{右}$ とおく．ある世界から別の世界へ移る様子は，次図のように表される．



例えば， n 回目に左の世界にいるとき， $n+1$ 回目には半々の確率で再び左の世界に居るか真ん中の世界に移る，という事をあらわしている．したがって，次のように漸化式を立てる事が出来る．

$$P_{n+1}^{左}=\frac{1}{2}P_n^{左}+\frac{1}{2}P_n^{中}\cdots①,\quad P_{n+1}^{中}=\frac{1}{2}P_n^{左}\cdots②,\quad P_{n+1}^{右}=\frac{1}{2}P_n^{中}+\underbrace{P_n^{右}}\cdots③.$$

↑忘れやすいかも!?

また，確率の和は 1 であるから

$$P_n^{左}+P_n^{中}+P_n^{右}=1\cdots④.$$

更に，初期条件は

$$P_1^{左}=\frac{1}{2},\quad P_1^{中}=\frac{1}{2},\quad P_1^{右}=0\cdots⑤$$

このような式は，使わなくても，答案の最初のほうに書いておいたほうが何かと良いかも….

である．さて，①，②式から，

$$P_{n+1}^{左}-\frac{1}{2}P_n^{左}-\frac{1}{4}P_{n-1}^{左}=0\quad(n\geqq 2)\cdots⑥.$$

（ここで，②の添え字の n のカウントを一つ減らして①に代入したので，$n\geqq 2$ という条件が現れました．この手の問題の 98%は，まず，$n\geqq 2$ の元で解いてみて，具体的な式が求められた後で $n=1$ でも成立する事を確認すればよいんですね～．当然 $n=1$ を分けて考えないといけない事もありますが，ほとんど $n=1$ の場合も統合する事が出来ますね．今回のように確認できる場合は $n=2$ の場合も検算を兼ねて，成立する事を確認したほうが良いと思います．ちなみに，$P_2^{左}=\frac{1}{2}$，$P_2^{中}=\frac{1}{2}$，$P_2^{右}=\frac{1}{2}$ です．まあそのくらいは解説無しでわかるよね！？！？）

⑥式は 3 項間漸化式であるので，次の特性方程式の解を用いて式を変形すればよい．即ち，

$$x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}=0\iff x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{4}\equiv\alpha,\beta\quad(\alpha<\beta とする)$$

より，

$$⑤\iff\begin{cases}P_{n+1}^{左}-\alpha P_n^{左}=\beta\left(P_n^{左}-\alpha P_{n-1}^{左}\right)\\ P_{n+1}^{左}-\beta P_n^{左}=\alpha\left(P_n^{左}-\beta P_{n-1}^{左}\right)\end{cases}$$

として，2 通りに表すことができる．これらの式は左辺の $n+1$， n が右辺では n， $n-1$ と一つ分減る事で変わりに β や α が先頭に出現している．つまり，この関係を $n-1$ 回繰り返し用いると，

$$\begin{cases} P^{左}_{n+1}-\alpha P^{左}_{n}=\beta^{n-1}\left(P^{左}_{2}-\alpha P^{左}_{1}\right) \\ P^{左}_{n+1}-\beta P^{左}_{n}=\alpha^{n-1}\left(P^{左}_{2}-\beta P^{左}_{1}\right) \end{cases}$$

となる．$P^{左}_{n+1}$ の項が邪魔なので，辺々引くと，

$$(\beta-\alpha)P^{左}_{n}=\beta^{n-1}\left(P^{左}_{2}-\alpha P^{左}_{1}\right)-\alpha^{n-1}\left(P^{左}_{2}-\beta P^{左}_{1}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{5}}{2}P^{左}_{n}=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{2}-\frac{1-\sqrt{5}}{4}\cdot\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{2}-\frac{1+\sqrt{5}}{4}\cdot\frac{1}{2}\right) \qquad (\because ⑤)$$

$$\therefore \quad P^{左}_{n}=\frac{2}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^{n+1}\right\}$$ （$n=1$でも成立）.

したがって②より，

$$P^{中}_{n+1}=\frac{1}{2}P^{左}_{n}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^{n+1}\right\}$$

（n の次数を一つ下げる．そのとき，ここでも $n\geqq 2$ という条件が必要になりますが，$n=1$ の場合も問題なく成立するので，俺ﾜｶｯﾃﾙﾖって事を示すために，$n=1$でも成立，などと記しておけばよいと思います．何べんも同じ事グダグダ書くのはナンセンスです YO!）

$$\therefore \quad P^{中}_{n}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{n}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^{n}\right\}$$ （$n=1$でも成立）.

以上の式を最後に④に代入すれば，

(＊)
$$\begin{cases} P^{右}_{n}=1-P^{左}_{n}-P^{中}_{n} \\ \quad =1-\frac{2}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^{n+1}\right\}-\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{n}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^{n}\right\} \\ \quad =1-\frac{4}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{n}\left(\frac{6+2\sqrt{5}}{16}\right)-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^{n}\left(\frac{6-2\sqrt{5}}{16}\right)\right\} \\ \quad =1-\frac{4}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{n+2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^{n+2}\right\} \end{cases}$$

となる．n 回目ではじめて右に到達する確率を求めればよく，その確率 p は $n\geqq 2$ において，

$$p=P^{右}_{n}-P^{右}_{n-1}=1-\frac{4}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{n+2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^{n+2}\right\}-1+\frac{4}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^{n+1}\right\}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1}\right\}$$ （$n=1$の時も成立）

$$\therefore \quad \frac{1}{2\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1}\right\}$$

（＊）部分は次のようにしても良いです（部分的別解）．

③を変形すると，

$$P^{右}_{n+1}=\frac{1}{2}P^{中}_{n}+P^{右}_{n}\ \Leftrightarrow\ P^{右}_{n+1}-P^{右}_{n}=\frac{1}{2}P^{中}_{n}.$$

階差型ですね．という事で和をとりましょう．

となる．したがって，$n\geqq 2$ のとき，

$$P^{右}_{n}=P^{右}_{1}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(P^{右}_{k+1}-P^{右}_{k}\right)=P^{右}_{1}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}P^{中}_{n}$$

$$=\frac{\sqrt{5}}{10}\sum_{k=1}^{n-1}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{k}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^{k}\right\}=\frac{\sqrt{5}}{10}\left[\frac{\frac{1+\sqrt{5}}{4}\left\{1-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{4}}-\frac{\frac{1-\sqrt{5}}{4}\left\{1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{1-\sqrt{5}}{4}}\right]$$

$$=\frac{\sqrt{5}}{5\cdot 4^{n-1}}\left[\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)\left\{4^{n-1}-\left(1+\sqrt{5}\right)^{n-1}\right\}}{\left(1-\sqrt{5}\right)^{2}}-\frac{\left(1-\sqrt{5}\right)\left\{4^{n-1}-\left(1-\sqrt{5}\right)^{n-1}\right\}}{\left(1+\sqrt{5}\right)^{2}}\right]=1-\frac{4}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{n+2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^{n+2}\right\}$$

（これは，$n=1$ でも成立する）．

（（＊）の部分的別解終わり）