関数解析Bレポート

1G06Q117-5 園田 翔*

2009 年 8 月 19 日

1　授業中に出した問題

問 1.1 (センスの良い Lebesgue 収束定理の応用を挙げよ。)
$\Omega := (0,1)$ において,

$$f_n(x) := x^n \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{1.1}$$

とおくと，これは $f \equiv 0$ に各点収束（従って特に概収束）するが一様収束しない。
　また，以下のように上から一様に押さえ込むことができる。

$$|f_n(x)| = x^n \leq x^1 \quad (x \in (0,1)) \tag{1.2}$$

　従って，Lebesgue の優収束定理によって積分と極限の交換が成り立つ。

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 x^n dx = \int_0^1 0 dx = 0 \tag{1.3}$$

問 1.2 (集合 $A \subset \mathbb{R}^d$ の Lebesgue 測度が零とはどういうことか，説明と基本的な性質を与えよ。)
<u>説明</u>
集合 $A \subset \mathbb{R}^d$ の Lebesgue 測度が零とは，A が Lebesgue 可測集合であって，その Lebesgue 測度が 0 になることである。

$$\mu_{\mathcal{L}}(A) = 0 \tag{1.4}$$

　即ち，任意の $\epsilon > 0$ に対し，以下を満たす左半開区間の列 $\{J_n := \prod_{k=1}^d (a_{nk}, b_{nk}]\}_{n=1}^\infty$ がとれることをいう。

$$A \subset \bigcup_{n=1}^\infty J_n \tag{1.5}$$

$$\sum_{n=1}^\infty |J_n| < \epsilon \tag{1.6}$$

　ただし，左半開区間の大きさは，$|J| := \prod_{k=1}^d |b_k - a_k|$ で測る。以下では，Lebesgue 測度が零の集合を単に**零集合**と呼ぶことにする。
<u>零集合の性質</u>
零集合の可算和は再び零集合である。一般に，高々可算個の点からなる集合は零集合であるが，逆

* 早稲田大学理工学部電気・情報生命工学科４年

は必ずしも成り立たない。そのような反例（連続体濃度をもちながら測度零になる集合）として $Cantor$ 集合が知られている。

ほとんどいたるところ

測度空間の各点 $x \in \Omega$ に対して定義された述語 $P(x)$ に対して，零集合 N があって，$x \in X \setminus N$ で $P(x)$ が真になるとき，$P(x)$ **はほとんどいたるところで真**という。例えば**概収束**とは，ほとんどいたるところで各点収束することである。

測度の完備性

零集合の部分集合がすべて可測集合になっているような測度空間を，完備であるという。

$$^{\forall}B \subset A,\ \mu_{\mathcal{L}}(A) = 0 \Rightarrow B \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}} \tag{1.7}$$

測度の劣加法性により，ただちに $\mu_{\mathcal{L}}(B) = 0$ が従う。完備でない一般の測度に対し，測度の完備化は唯一存在することが知られている。

Lebesgue 積分との関係

$f \in L^1(\Omega)$ を零集合上で積分すれば，その値は零になる。

$$\mu_{\mathcal{L}}(A) = 0 \Rightarrow \int_A f(x)dx = 0 \tag{1.8}$$

このことは，積分を測度 $\nu(A) := \int_A f dx$ とみなしたときに，もとの Lebesgue 測度 μ に対して絶対連続であることを示唆する。また，このことを使って $f = g$ a.e. ならば $\int_\Omega f dx = \int_\Omega g dx$ を示せる。L^p 空間においては，ほとんどいたるところ等しい関数を同一視することが L^p ノルムの要となっている。

問 1.3 (L^1 ノルム収束 $\Rightarrow$ 概収束 は成り立つか？)

成り立たない。

反例

$\Omega := [0, 1)$ 上の関数列を以下のように定義する。まず $\phi_{n,k}$ を以下のように定義し，

$$\phi_{n,k}(x) := \begin{cases} 1 & x \in [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (k = 1, 2, \cdots, n) \tag{1.9}$$

これを次のように並べたものを改めて f_n とする。

$$\phi_{1,1}, \phi_{2,1}, \phi_{2,2}, \phi_{3,1}, \cdots \tag{1.10}$$

$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $f \equiv 0$ に L^1 ノルム収束する。

$$\int_\Omega |f_n| dx = \int_{[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n})} dx = \frac{1}{n} \to 0 \quad (n \to 0) \tag{1.11}$$

一方，これは概収束しない。実際，$x \in \Omega$ を任意にとって固定すると，$|f(x)_n|$ は振動してしまって収束しないことが分かる。

修正

一般に，L^p **ノルム収束** $(1 \leq p < \infty)$ **すれば概収束する部分列を取り出すことができる。** 証明は二段階に分けて行われる。

Step1. L^p ノルム収束 $\Rightarrow$ 測度収束

Chebyshev 不等式により，任意の $\epsilon > 0$ に対して以下が成り立つ。

$$\mu\{x \in \Omega | |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\} < \frac{1}{\epsilon^p}\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)}^p \tag{1.12}$$

$n \to \infty$ で右辺は *0* に収束するから，左辺も *0* に収束する。よって測度収束。

<u>*Step2.*</u> 測度収束 ⇒ 概収束する部分列がとれる。

任意の k に対して，次を満たす n_k をとることができる。

$$n_k \leq j \Rightarrow \mu\{x \in \Omega | |f_j(x) - f(x)| \geq 2^{-k}\} < 2^{-k} \tag{1.13}$$

$n_1 < n_2 < \cdots$ としてよく，$N_k := \{x \in \Omega | |f_{n_k}(x) - f(x)| \geq 2^{-k}\}, N := \limsup N_k = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\leq k} N_k$ とおくと，N は零集合。

実際,

$$\mu(N) \leq \mu(\bigcup_{n\leq k} N_k) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \mu(N_k) \leq \sum_{k=n}^{\infty} 2^{-k} = 2^{1-n} \tag{1.14}$$

となって，n は任意だから右辺 $\to 0$。ゆえに $\mu(N) = 0$

一方，$x \notin N$ のとき $x \in N^c = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\leq k} N_k^c$。ゆえにある n があって，$n \leq k \Rightarrow x \in N_k^c$。従って $n \leq k \Rightarrow |f_{n_k}(x) - f(x)| < 2^{-k}$ であるから，結局，$f_{n_k} \to f$ a.e.$x \in \Omega$

以上により，L^p ノルム収束すれば概収束する部分列を取り出せることが分かった。 ■

問 1.4 (通常の Lebesgue の定理から，授業で与えた定理を導け。)

<u>通常の Lebesgue の定理</u>

可測関数の列 $f_{n n=1}^{\infty} \subset L(\Omega)$ に対して，ある関数 f が存在して以下を満たすとする。

1. $f_n \to f$ a.e.$x \in \Omega$
2. $^\forall n \quad |f_n| \leq g$ a.e.$x \in \Omega$

このとき，$f \in L^1(\Omega)$ で，極限と積分の交換が可能。

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n dx = \int_\Omega f dx$$

<u>授業で示した定理</u>

条件は同じ。最後の結論が $\|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} \to 0$ に変わる。

<u>通常⇒授業の証明</u>

定理の条件が成り立っているとする。このとき $g_n := f_n - f$ もまた定理の条件を満たす。実際，１つめの仮定から $g_n \to 0$ a.e.$x \in \Omega$ で，２つめの仮定から以下も成り立つ。

$$|g_n| = |f_n - f| \leq |f_n| + |f| \leq g + |f| \tag{1.15}$$

定理より右辺は L^1 関数で n によらないから，通常の Lebesgue の優収束定理によって以下が成り立つ。

$$\|g_n\|_{L^1(\Omega)} \to \|0\|_{L^1(\Omega)} = 0 \tag{1.16}$$

これは授業で示した形である。 ■

問 1.5 (以下を示せ。)

定理 $p, p_1, \cdots, p_n \in [1, \infty]$ が,

$$\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_n} = \frac{1}{p}$$

を満たしているとする。各 k に対し $f_k \in L^{p_k}$ とすれば, $f_1 \cdots f_n \in L^p$ であり, さらに

$$\|f_1 \cdots f_n\|_{L^p} \leq \|f_1\|_{L^{p_1}} \cdots \|f_n\|_{L^{p_n}}$$

が成り立つ。

証明

$n = 1$ のときは明らか。$n \geq 2$ のとき, n の帰納法で示す。

$n = 2$ のとき 簡単のため, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}, f \in L^p, g \in L^q$ と記号を改める。元の問題の p が変わってしまっていることに注意する。また, $\| \cdot \|_{L^p(\Omega)}$ と $\int_\Omega \cdot dx$ を単に $\| \cdot \|_p$, $\int \cdot dx$ と書く。

まず, $\frac{1}{\frac{p}{r}} + \frac{1}{\frac{q}{r}} = 1$ $(\frac{p}{r}, \frac{q}{r} \in [1, \infty])$ が成り立つ。実際, 条件よりまず $\frac{r}{p} + \frac{r}{q} = 1$ が成り立つが, 左辺の各項はいずれも正でなくてはならないことから $\frac{r}{p}, \frac{r}{q} \in [0, 1]$ が従う。

さらに, $|f|^r \in L^{\frac{p}{r}}, |g|^r \in L^{\frac{q}{r}}$ である。実際, $\|f\|_p^p = \int |f|^p dx = \int |f|^{r\frac{p}{r}} dx = \||f|^r\|_{\frac{p}{r}}^{\frac{p}{r}}$ となって, 最左辺は定義より有限になることから従う。g についても同様。

従って, Hölder の不等式により $|fg|^r \in L^1$ で以下が成り立つ。

$$\||fg|^r\|_1 \leq \||f|^r\|_{\frac{p}{r}} + \||g|^r\|_{\frac{q}{r}} \tag{1.17}$$

右辺は以下のように変形できる。

$$\||f|^r\|_{\frac{p}{r}} = \left(\int |f|^{r\frac{p}{r}} dx \right)^{\frac{r}{p}} = \left(\int |f|^p dx \right)^{\frac{r}{p}} = \|f\|_p^r \tag{1.18}$$

左辺も同様にして $\||fg|^r\|_1 = \|fg\|_r^r$ と変形できるので, 結局次を得る。

$$\|fg\|_r^r \leq \|f\|_p^r + \|g\|_q^r \tag{1.19}$$

両辺の r 乗根をとって, $n = 2$ の場合に成り立つことが示される。

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p + \|g\|_q \tag{1.20}$$

$n = k$ で成り立つと仮定して, $n = k + 1$ のとき 元の記号に戻して議論する。$q \in [1, \infty]$ として, $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_k} = \frac{1}{q}$ となるものが取れる。従って $g := f_1 \cdots f_k$ とおけば, 仮定より $g = f_1 \cdots f_k \in L^q$ で, 以下が成り立つ。

$$\|g\| \leq \|f_1\|_{p_1} \cdots \|f_k\|_{p_k} \tag{1.21}$$

さらに, 関数を g, f_{k+1} の 2 つとみなせば $n = 2$ の議論を適用できる。これによって $gf_{k+1} \in L^p$ で, 上式と組合わせて $n = k + 1$ の場合にも成り立つことが示される。

$$\|f_1 \cdots f_{k+1}\|_p = \|gf_{k+1}\|_p \leq \|g\|_q \|f_{k+1}\|_{k+1} \leq \|f_1\|_1 \cdots \|f_{k+1}\|_{k+1} \tag{1.22}$$

■

問 1.6 (以下を示せ。)

定理

$p, q, r \in [1, \infty]$, $\theta \in [0, 1]$ が，$\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}$ を満たすとする。このとき $f \in L^p \cap L^q$ とすれば，$f \in L^r$ で以下が成り立つ。

$$\|f\|_r \leq \|f\|_p^\theta \|f\|_q^{1-\theta}$$

証明

前問の定理が使える。実際，$r, \frac{p}{\theta}, \frac{q}{1-\theta} \in [1, \infty]$ で，$\frac{1}{\frac{p}{\theta}} + \frac{1}{\frac{q}{1-\theta}} = \frac{1}{r}$ が成り立つ。また，$\|f\|_p^p = \int |f|^{\theta \frac{p}{\theta}} dx = \||f|^\theta\|_{\frac{p}{\theta}}^{\frac{p}{\theta}}$ となることから，$f^\theta = \in L^{\frac{p}{\theta}}$ である。同様にして $f^{1-\theta} \in L^{\frac{q}{1-\theta}}$ であることも分かる。

従って定理より $f^\theta f^{1-\theta} = f \in L^r$ で，式 (1.18) と同様の変形によって以下を得る。

$$\|f\|_r = \|f^\theta f^{1-\theta}\|_r \leq \|f^\theta\|_{\frac{p}{\theta}} \|f^{1-\theta}\|_{\frac{q}{1-\theta}} = \|f\|_p^\theta \|f\|_q^{1-\theta} \tag{1.23}$$

これは求める式である。■

問 1.7 と問 1.8 の問題設定

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $u \in L^q(\Omega)$ に対し，

$$\phi_u : L^p(\Omega) \to \mathbb{R}; f \mapsto \int_\Omega fu\, dx$$

とおく。

問 1.7 ($p = 1, \infty$ のとき $\|\phi_u\|_{p*} = \|u\|_q$ を示せ。)

証明

$p = 1$ のとき Hölder の不等式により，$fu \in L^1$ で $\int |fu| dx \leq \|f\|_1 \|u\|_\infty$ となることから，ただちに $\|\phi_u\|_{p*} = \sup_{0 \neq f \in L^p} \frac{|\int fu dx|}{\|f\|_1} \leq \|u\|_\infty$ が分かる。

逆向きの不等式を示す。sup の定義から，任意の $\epsilon > 0$ に対して $A \subset \{x \in \Omega | u(x) > \|u\|_\infty - \epsilon\}$ で，$\mu(A) \in (0, \infty)$ となるものがとれる。ここで $f := \frac{1}{\mu(A)} \chi_A \mathrm{sgn} u$ とおく。ただし，χ_A は特性関数で，sgn は以下で定義される。

$$\mathrm{sgn} u := \begin{cases} 1 & u > 0 \\ 0 & u = 0 \\ -1 & u < 0 \end{cases}$$

$$\|f\|_1 = \frac{1}{\mu(A)} \int_\Omega \chi_A dx = \frac{1}{\mu(A)} \mu(A) = 1 \tag{1.24}$$

となって，$f \in L^1$ を満たしていることが分かる。さらにこのとき以下が成り立つ。

$$\|\phi_u\|_{p*} \geq \left| \int fu dx \right| = \frac{1}{\mu(A)} \int_A |u| dx \geq \frac{\|u\|_\infty - \epsilon}{\mu(A)} \int_A dx = \|u\|_\infty - \epsilon \tag{1.25}$$

よって ϵ は任意だったから，$\epsilon \to 0$ とすれば，$\|\phi_u\|_{p*} \geq \|u\|_\infty$ を得る。これは求める式である。

$p = \infty$ のとき $p = 1$ のときと同様にして，Hölder の不等式から $\|\phi_u\|_{p*} \leq \|u\|_1$ が示される。

逆向きを示す。$f := \mathrm{sgn} u$ とおくと，$|f| \leq 1$ なので $\|f\|_\infty = 1$ となって，$f \in L^\infty$ が分かる。さらに，$|\phi_u f| = \|u\|_1$ と作用素ノルムの定義式から求める式を得る。

$$\|u\|_1 = |\phi_u f| \leq \|\phi\|_{p*} \|f\| = \|\phi\|_{p*} \tag{1.26}$$

■

問 1.8 ($\phi : L^q(\Omega) \to (L^p(\Omega))^*; u \mapsto \phi_u$ は有界線形作用素であることを示せ。)

証明

$f \in L^p(\Omega)$ を任意に 1 つとる。$a, b \in \mathbb{R}, u, v \in L^q(\Omega)$ とする。$au + bv \in L^q(\Omega)$ であることに注意すると，積分の線形性からただちに u についての線形性 $\phi_{au+bv} f = a\phi_u f + b\phi_v f$ が分かる。Hölder の不等式から $f(au + bv) \in L^1$ で，以下のようにしてこの演算が *well-defined* であることも分かる。

$$\left|\phi_{au+bv} f\right| \leq \|f(au + bv)\|_1 \leq \|f\|_p \|au + bv\|_q \tag{1.27}$$

この式で $a = 1, b = 0$ とすれば u についての有界性も分かる。■

問 1.9 (次の表で可分性・稠密性について説明せよ。)

L^p の性質 以下では $1 < p < \infty$ とする。

	共役	回帰性	可分性	$C_0^\infty(\Omega)$ が稠密
L^1	L^∞	×	○	○
L^p	L^q	○	○	○
L^∞	$\supset L^1$	×	×	×

可分性について

$1 \leq p < \infty$ に対し，$L^p(\Omega)$ は可分であることが知られている。証明は可測関数が単関数で近似（正値有界可測関数は一様収束）できることを利用して行われる。開区間 $L = \prod_{k=1}^n (a_k, b_k)$ で，端点が有理数 $(a_k, b_k \in \mathbb{Q})$ であり，かつ $L \subset \Omega$ となるものの全体を E とおくと，E は可算族になる。従って E の元を L_i と書くことができ，各 L_i に対する特性関数 χ_{L_i} の有理数係数単結合の全体を $\mathcal{S}(E)$ とおくと，これもまた可算集合になる。この $\mathcal{S}(E)$ を用いて単関数を L^p ノルムで近似できる。という流れになる。

一方，一般に $L^\infty(\Omega)$ は可分でない。例として $\Omega := (0, 1)$ のとき $L^\infty(\Omega)$ が可分でないことを示す。$t \in (0, 1)$ に対し $f_t(x) := \chi_{(0,t)(x)}$ とおけば，各 t に対し $f_t \in L^\infty(\Omega)$ で，$F := \{f_t\}_{t\in(0,1)}$ は非可算集合になる。$t \neq t' \Rightarrow \|f_t - f_{t'}\|_\infty = 1$ が成り立つことに注意して，$L^\infty(\Omega)$ が可分であると仮定すると矛盾が生じることを示す。いま，$L^\infty(\Omega)$ は可分であると仮定したので，稠密な可算部分集合 $X := \{x_k\}_{k=1}^\infty$ が存在して，各 t に対して $\|f_t - x_k\|_\infty < \frac{1}{4}$ となるようにとることができる。F は非可算，X は可算なので，ある x_k と $t \neq t'$ で $\|f_t - x_k\|_\infty < \frac{1}{4}, \|f_{t'} - x_k\|_\infty < \frac{1}{4}$ となるものがとれる。このとき $\|f_{t'} - f\|_\infty \leq \|f_t - x_k\|_\infty + \|f_{t'} - x_k\|_\infty < \frac{1}{2}$ となって，これは先の $\|f_t - f_{t'}\|_\infty = 1$ に反する。よって可分でない。

稠密性について

$1 \leq p < \infty$ に対し，$C_0^\infty(\Omega)$ は $L^p(\Omega)$ で稠密であることが知られている。証明は二段階に分けて行われる。まず L^p 関数 f を $|x| > N$ で 0 にした関数を $K_N f$ として，関数列 $\{K_N f\}_{N=1}^\infty$ が f に L^p 収束することを示す。次に，$K_N f$ がコンパクトサポートを持つことから，軟化子を用いて C_0^∞ 関数で L^p ノルム近似できることを示して証明終了となる。

一方，この方法は Lebesgue の優収束定理を使うから，$L^\infty(\Omega)$ には適用できない。

問 1.10 (以下を示せ。)

$\rho(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ が以下を満たすとする。

1. $\rho \geq 0 \ {}^\forall x \in \mathbb{R}$

2. $\mathrm{supp}\rho \subset [-1, 1]$

3. $\int_{-1}^{1} \rho(x)dx = 1$

さらに $\rho_n(x) := n\rho(nx)$ $(n \in \mathbb{N})$ とし，
$\phi \in C_0(I)$ に対し $(\rho_n * \phi)(x) := \int_{\mathbb{R}} \rho_n(x-y)\phi(y)dy$ とおく。
1. ρ が存在することを示せ。以下のようにおけばよい。

$$\rho(x) := \begin{cases} Ce^{-\frac{1}{1-x^2}} & x \in (-1, 1) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{1.28}$$

$C > 0$ は適当な規格化定数。正値性とコンパクトサポートを持つことは明らか。$|x| = 1$ における微分可能性を確かめる。$(-1, 1)$ において k 階導関数は $\rho^{(k)}(x) = \frac{P_k(x)}{(1-x^2)^{2k}}\rho(x)$ で与えられるから，$|x| \to 1 - 0$ として $\rho^{(k)}(x) \to 0$ 一方，定義より $|x| \to 1 + 0$ のとき $\rho^{(k)}(x) \to 0$ となって，両者は任意の k で一致するので，ρ は $|x| = 1$ で C^∞ 級であることが分かる。他の点の微分可能性は自明。よって条件を満足する関数 ρ が構成できた。
2.1 十分大きな n に対して $\mathrm{supp}(\rho_n * \phi) \subset I$ を示せ。
定義より $\mathrm{supp}\rho_n \subset [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$ である。$\mathrm{supp}\phi = K = [a, b]$ とする。このとき $\mathrm{dist}(x, K) > \frac{1}{n}$ にとれば，$|x - y| > \frac{1}{n}$ なので $\rho_n(x - y) = 0$。従って $\mathrm{supp}(\rho_n * \phi) \subset [a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}]$ となる。これは K を $\frac{1}{n}$ だけ膨らませたものである。$K \subset I$ だったから，n を十分大きくとれば $\mathrm{supp}(\rho_n * \phi) \subset I$ とできることが分かる。
2.2 $\rho_n * \phi \in C_0^\infty(I)$ を示せ。
$f(x, y) := \rho_n(x - y)\phi(y)$ とおく。$\rho_n \in C_0^\infty$ と $\phi \in C_0$ よりほとんどいたるところの y で $|\frac{\partial^k}{\partial x^k} f(x, y)| \leq \sup |\frac{\partial^k}{\partial x^k}\rho_n(x - y)||\phi(y)| \in L^1$。従って Lebesgue の優収束定理の系によって微分と積分の交換ができて，$\rho_n * \phi \in C_0^\infty(I)$ が分かる。
2.3 $\|\rho_n * \phi - \phi_{C(I)} \to 0$ $(n \to \infty)$ を示せ。
ϕ はコンパクトサポートを持つ連続関数だから，一様連続であることに注意する。x を任意にとって固定して，以下が成り立つ。

$$\begin{aligned} |(\rho_n * \phi)(x) - \phi(x)| &= \Big| \int_{\mathbb{R}} \rho_n(x - y)\phi(y)dy - \int_{\mathbb{R}} \rho_n(x - y)\phi(x)dy \Big| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\rho_n(x - y)}_{\mathrm{supp} \subset [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]} |\phi(y) - \phi(x)|dy \\ &\leq \sup_{|x-y|<\frac{1}{n}} |\phi(y) - \phi(x)| \int_{\mathbb{R}} \rho_n(y - x)dy \\ &= \sup_{|x-y|<\frac{1}{n}} |\phi(y) - \phi(x)| \end{aligned} \tag{1.29}$$

ϕ の一様連続性から，適当な $\delta > 0$ をとって，$|x - y| < \delta \Rightarrow |\phi(x) - \phi(y)| < \epsilon$ とできる。従って，$\frac{1}{N} < \delta$ となる N をとれば，先に得られた不等式によって $N \leq n \Rightarrow |(\rho_n * \phi)(x) - \phi(x)| < \epsilon$。$x$ は任意だったから，不等式の最左辺で sup をとって以下が成り立つ。

$${}^\forall \epsilon > 0 {}^\exists N \text{s.t.} N \leq n \Rightarrow \sup_{x \in I} |(\rho_n * \phi)(x) - \phi(x)| < \epsilon$$

これは $\|\cdot\|_{C(I)}$ ノルム収束を表す。 ■

問 1.11 ($W^{1,p}(I)$ で，弱微分は存在すれば唯一であることを示せ。)
<u>証明</u>
$u \in L^p(I)$ の弱微分 $g, h \in L^p(I)$ が 2 つあったとして，変分法の基本補題を用いてそれらが等しいことを示す。
<u>変分法の基本補題</u> $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ が以下を満たせば，$f = 0$a.e.

$$\int_\Omega f\phi dx = 0 \quad ({}^\forall \phi \in C_0^\infty(\Omega))$$

実際，任意の $\phi \in C_0^\infty(I)$ に対して $\int_I u\phi' dx = -\int_I g\phi dx$，$\int_I u\phi' dx = -\int_I h\phi dx$ が成り立っていたとすると，両辺を引くことで $\int_I (g-h)\phi dx = 0$ を得る。従って，変分法の基本補題によって $g - h = 0$a.e. ■

問 1.12 (有界変動関数についてまとめよ)
<u>有界変動関数 $BV(I)$</u>
区間 $I := [a, b]$ 上の関数を f とする。I の分割 $\triangle : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$ とし，f に対し次で定義される量を f の全変動といい，$V(f)$ などと書く。

$$V(f) := \sup_{\triangle} \sum_{j=1}^{N} |f(x_j) - f(x_{j-1})|$$

$V(f)$ が有界なとき，f は（I 上）有界変動であるといい，有界変動関数の全体を $BV(I)$ と書く。単調関数は有界変動関数である。
<u>有界変動関数の正体</u>
$f : I \to \mathbb{R}$ が有界変動関数であるための必要十分条件は，ある単調増加関数 g, h の差 $f = g - h$ として表現されることである。
<u>有界変動関数の微分可能性</u>
$f \in BV(I)$ は ほとんどいたるところ微分可能で，その導関数は可積分である。

$$f' \in L^1(I)$$

さらに，高々可算個の点を除いて連続である。
<u>特異関数</u>
$f \in BV(I)$ で，$f'(x) = 0$a.e. となるものを特異関数という。Cantor 関数は特異関数の例である。
<u>絶対連続関数 $AC(I)$</u>
区間 I 上の関数 f とする。任意の $\epsilon > 0$ に対し，ある $\delta > 0$ があって，I の互いに素な任意の区間列 $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^n \subset I$ に対して，

$$\sum_{k=1}^{n} |b_k - a_k| < \delta \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)|$$

とできるとき，f は絶対連続であるという。
絶対連続関数は有界変動である。従ってほとんどいたるところ微分可能である。

Lipschitz 連続関数

区間 I 上の関数 f とする。ある定数 L があって，任意の $x, y \in I$ に対して

$$|f(y) - f(x)| \leq L|y - x|$$

が成り立つとき，f は Lipschitz 連続であるという。

有界閉区間上の Lipschitz 連続関数は絶対連続である。

絶対連続関数の正体

$F \in AC(I)$ となるための必要十分条件は，ある $f \in L^1(I)$ の不定積分 $F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)dt$ となることである。

有界変動関数の Lebesgue 分解

有界変動関数は特異関数と絶対連続関数の和に分解できる。

絶対連続関数はある可積分関数の不定積分として表現できたから，結局次のように書けることを主張している。

$$f(x) = g(x) + \int_a^x h(t)dt$$

この分解は定数を除いて一意である。

2 Sobolev 空間に関する問題を適当に設定して解く

問題設定

楕円型境界値問題において Sobolev 空間がどのように使われるかを調べる。

楕円型境界地問題

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 有界領域において，次の問題を考える。

$$\begin{cases} -\Delta u + ku = f & x \in \Omega \\ u = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{2.1}$$

$k > 0$ 定数，$f \in L^2(\Omega)$ given とする。

境界地問題の弱解

$u \in H_0^1(\Omega)$ が 2.1 の弱解であるとは，次を満たすことをいう。

$$(\nabla u, \nabla\phi)_{L^2} + k(u, \phi)_{L^2} = (f, \phi)_{L^2} \quad ({}^\forall\phi \in C_0^\infty(\Omega)) \tag{2.2}$$

ただし ∇ などは弱微分の意味に置き換える。これを弱方程式といい，ϕ を試験関数という。

弱方程式は，$u \in C^2(\Omega)$ のときグリーンの公式によって部分積分することで，

$$(-\Delta u, \phi)_{L^2} + k(u, \phi)_{L^2} = (f, \phi)_{L^2} \quad ({}^\forall\phi \in C_0^\infty(\Omega))$$

という形に変形できる。ここで変分法の基本補題を適用すると，u はほとんどいたるところ元の方程式の解になっていることが分かる。

$$-\Delta u + ku = f \quad (\text{a.e.} x \in \Omega)$$

境界条件のほうは $u \in H_0^1(\Omega)$ という前提から自動的に満たされている。

弱解の一意性

$H_0^1(\Omega)$ の内積として $(u,v)_{H_0^1} := (\nabla u, \nabla v)_{L^2} + k(u,v)_{L^2}$ を採用する。弱方程式は次のように書ける。

$$(u,\phi)_{H_0^1} = (f,\phi)_{L^2} \quad ({}^\forall \phi \in H_0^1(\Omega)) \tag{2.3}$$

ただし，$C_0^\infty(\Omega)$ が $H_0^1(\Omega)$ で稠密であることに注意して，試験空間を拡張した。

$u,v \in H_0^1(\Omega)$ がともに弱解であるとき，$(u,\phi)_{H_0^1} = (f,\phi)_{L^2}$，$(v,\phi)_{H_0^1} = (f,\phi)_{L^2}$ から $(u-v,\phi)_{H_0^1} = 0$ が導かれる。ここで $\psi = u-v$ を代入すると，$\|u-v\|_{H_0^1} = 0$ となって，$u=v$ が分かる。したがって弱解は存在すれば唯一である。

弱解の存在

2.3 の右辺を汎関数 $F(\psi) := (f,\psi)_{L^2}$ とみなすと，有界線形であることが分かる。実際，$|F(\psi)| \leq \|f\|_{L^2}\|\psi\|_{L^2} \leq \frac{\|f\|_{L^2}}{\sqrt{k}}\sqrt{\|\nabla\psi\|_{L^2}^2 + k\|\psi\|_{L^2}^2} \leq \frac{1}{\sqrt{k}}\|f\|_{L^2}\|\psi\|_{H_0^1}$ となることから有界性が従う。線形性は明らか。

従って，Riesz の表現定理によって，$a \in H_0^1(\Omega)$ が唯一存在して，以下を満たす。

$$F(\psi) = (\psi, a)_{H_0^1} \quad ({}^\forall \psi \in H_0^1(\Omega))$$

この形は式 2.3 に他ならないから，$u = a$ は弱解である。

ここまでの議論をまとめると，Ω 有界で $f \in L^2$ のとき式 2.1 には弱解 $u = a$ が唯一存在することが分かった。

弱解の正則性

実は，$f \in L^2$ のとき弱解は $u \in H^2$ となることが知られている。

一般に $f \in H^k$ のとき弱解は $u \in H^{k+2}$ が成り立ち，さらに $f \in C^\infty$ のとき $u \in C^\infty$ となることも示される。

これらは Sobolev の埋め込み定理から導かれる結果である。

境界 $\partial\Omega$ 上での正則性は，$\partial\Omega$ に C^2 級など適当な仮定をおくことで示される。

変分問題との関係

$H_0^1(\Omega)$ 上で汎関数

$$J[u] := \frac{1}{2}\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \frac{k}{2}\|u\|_{H_0^1}^2 - (f,u)_{L^2} \tag{2.4}$$

を最小化する変分問題を考える。境界地問題 2.1 の解を $\widetilde{u}$ とすれば，$\widetilde{u}$ はこの変分問題の解 u^* と一致する。実際，変分問題の解を $J[u^*] = \min_{u \in H_0^1} J[u]$ と表現して，$\eta(t)$ を次のようにおく。

$$\eta(t) := J[u^* + t\psi] \quad ({}^\forall t \in \mathbb{R}, {}^\forall \psi \in H_0^1(\Omega))$$

定義から η は $t=0$ で最小値をとることが分かる。η' を具体的に計算すると，

$$\eta(t) = J[u^*] + t\left((\nabla u^*, \nabla\psi)_{L^2} + k(u^*,\psi)_{L^2} - (f,\psi)_{H_0^1}\right) + \frac{t^2}{2}\left(\|\nabla\psi\|_{L^2}^2 + k\|\psi\|_{L^2}^2\right) \tag{2.5}$$

$$\eta'(t) = \left((\nabla u^*, \nabla\psi)_{L^2} + k(u^*,\psi)_{L^2} - (f,\psi)_{L^2}\right) + t\left(\|\nabla\psi\|_{L^2}^2 + k\|\psi\|_{L^2}^2\right) \tag{2.6}$$

となるから，結局 $\eta'(0) = 0$ より以下を得る。

$$(\nabla u^*, \nabla\psi)_{L^2} + k(u^*,\psi)_{L^2} = (f,\psi)_{L^2} \tag{2.7}$$

これは u^* が弱解であることを示している。逆に，$u=\widetilde{u}+\psi\in H_0^1(\Omega)$ とおいて $J[u]$ を計算すると次のようになる。

$$J[u]=J[\widetilde{u}]+(\nabla\widetilde{u},\nabla\psi)_{L^2}+k(\widetilde{u},\psi)_{L^2}-(f,\psi)_{H_0^1}+\frac{1}{2}\left(\|\nabla\psi\|_{L^2}^2+k\|\psi\|_{L^2}^2\right) \tag{2.8}$$

弱解であることから $(\nabla\widetilde{u},\nabla\phi)_{L^2}+k(\widetilde{u},\phi)_{L^2}-(f,\phi)_{L^2}=0$ を適用すると，以下を得る。

$$J[u]=J[\widetilde{u}]+\frac{1}{2}\left(\|\nabla\psi\|_{L^2}^2+k\|\psi\|_{L^2}^2\right) \tag{2.9}$$

ψ は任意だったから，$\psi=0$ のとき左辺を最小化できる。すなわち $u=\widetilde{u}$ は変分問題の解になっていることが分かった。

参考文献

[1] H. ブレジス著，藤田宏監訳・小西芳雄訳，関数解析，産業図書，1994

[2] 柴田良弘著，ルベーグ積分論，内田老鶴圃，2006

[3] 盛田健彦著，実解析と測度論の基礎，数学レクチャーノート [基礎編 4]，培風館，2007

[4] 猪狩惺著，実解析入門，岩波書店，1996

[5] J. ヨスト著，小谷元子訳，ポストモダン解析学，シュプリンガーフェアラーク東京，2003

[6] 藤田宏著，関数解析，岩波講座 応用数学 [基礎 5]，岩波書店，1995

[7] 黒田成俊著，関数解析，共立数学講座 (15)，共立出版，1980