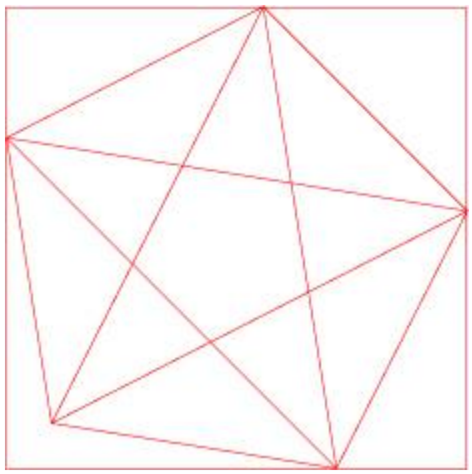
折紙の中の正五角形

桑村祐二

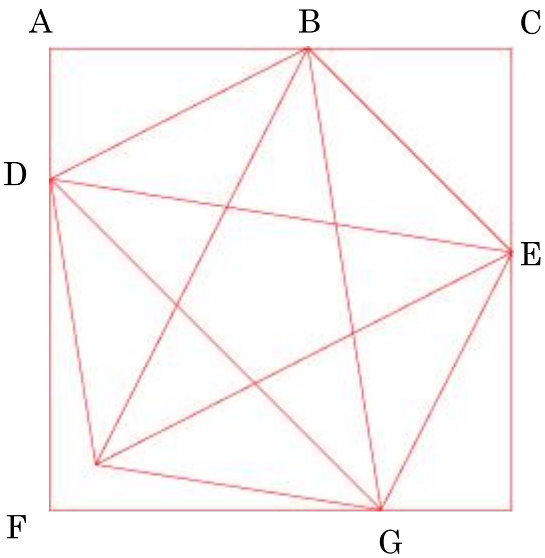
　このことについて調べてみようと思ったきっかけは、「Origami で幾何学する」というサイトで、このような図を見つけたからである。



　実はこの入れ方をすれば、余白が最も少なくなるのだ。つまり、正五角形が最大となる入れ方なのである！　どうにかしてこの図を自力で描いてみたい！　確かに早く図を描くのなら、上図での各々の長さを測り、その後に比を求めるなどをすればいいだろう。しかし、それではナンセンスである。ただ、何も与えられていない状態から描くのは極めて大変なので、４つの頂点が正方形の辺上にあり、45°の角があるということを前提とする。

　早速、計算してみた。

　折紙の１辺の長さを１、正五角形の１辺の長さを x とする。また、説明のしやすいように、次ページの図のように点をふるとする。



三角形 BCE と三角形 DFG が共に直角二等辺三角形であることに注目すると、BE＝ x より、BC＝$\frac{1}{\sqrt{2}}$x となる。また BE と DG が黄金比の関係であることから、DG＝$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$x なので、DF=$\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$x となる。最後に三角形 ABD に注目し、三平方の定理を用いる。

$$\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{x}\right)^2+\left(1-\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\,\mathrm{x}\right)^2=\mathrm{x}^2$$

……、これを計算して x を求めるのである。。途中計算は省略して、

$$\mathrm{x}=\frac{\sqrt{2}(3+\sqrt{5})\mp 2\sqrt{5+\sqrt{5}}}{1+\sqrt{5}}$$

ちなみに、$\frac{\sqrt{2}(3+\sqrt{5})+2\sqrt{5+\sqrt{5}}}{1+\sqrt{5}}$ ≈3.951 より不適である。よっ

て、$\frac{\sqrt{2}(3+\sqrt{5})-2\sqrt{5+\sqrt{5}}}{1+\sqrt{5}}$ ≈0.626 が x に適した値である。実際の折紙でこの正五角形を作るために、他の数値も近似値を求めておく。

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{x} \approx 0.442$$

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\,\mathrm{x} \approx 0.716$$

書いてみてやっと気づいたが、PC 上で図を描くためには、もうひとつ長さを求める必要があった。それは、正五角形で唯一記号を与えられていない頂点（この先では H とする）と点 F との直線距離である。ここで、CF と BE の交点を I とする。

$$\mathrm{CI}=\frac{1}{2}\,\mathrm{x}=\frac{3+\sqrt{5}-\sqrt{2(5+\sqrt{5})}}{\sqrt{2}(1+\sqrt{5})}$$

これはすぐに求められるが、大変なのは HI の長さである。$\frac{1}{2}$ x も $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ x も既に求まっているので、三平方の定理を用いて次の計算をすればいいだけである。

$$\mathrm{HI}=\sqrt{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\,\mathrm{x}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{x}\right)^2}$$

よって、下のようになる。

$$\mathrm{HI}=\frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}\,\frac{\sqrt{2}(3+\sqrt{5})-2\sqrt{5+\sqrt{5}}}{1+\sqrt{5}}$$

この値が既に x より複雑になっているのだが、大変だと言ったのは、最初に計算したとき x を先に代入してしまったからである。つまりは、次の計算をしたということだ。

$$\mathrm{HI}=\sqrt{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{2}}-\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)^2-\left(\frac{3+\sqrt{5}-\sqrt{2(5+\sqrt{5})}}{\sqrt{2}(1+\sqrt{5})}\right)^2}$$

上と同じ答えになるかと思いきや、結果は下のようになった。

$$\mathrm{HI}=\sqrt{\frac{100+44\sqrt{5}-(25\sqrt{2}+11\sqrt{10})\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2(3+\sqrt{5})}}$$

計算ミスかと思い、エクセルを用いて近似値を求めたところ、全く同じ値であった（確認可能な小数第九位まで一致)。

本題に戻り、FH の長さを求める。計算を簡単にするために、先に近似値を求めると、

$$\mathrm{CI} \approx 0.3129$$

$$\mathrm{HI} \approx 0.9629$$

FH を含む長さが$\sqrt{2} \approx 1.4142$なので、

$$\mathrm{FH} \approx 1.4142 - 0.3129 - 0.9629 = 0.1384$$

よって、

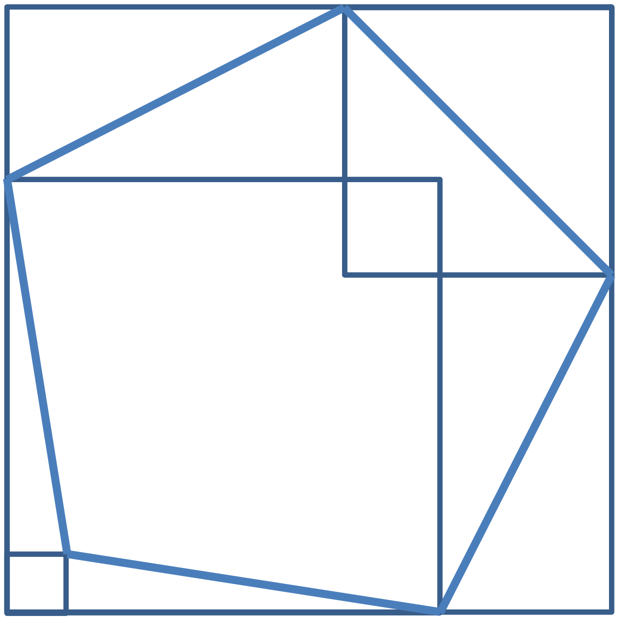
$$\frac{\mathrm{FH}}{\sqrt{2}} \approx \frac{0.1384}{1.4142} \approx 0.0979$$

これでやっと図が描ける。図は次ページに載せることにする。

ちなみに、BE と DG が黄金比の関係になるということをここで簡単に証明しておく。BG と DE の交点を J、正五角形の１辺の長さをｘ、正五角形の頂点のうち隣り合わない２点を結ぶ直線（この先では対辺と呼ぶ）の長さをｙとすると、三角形 BDJ と三角形 EGJ が合同で対応する辺が等しくなり、三角形 DEG と三角形 EGJ が黄金三角形であることから次の式が成り立つ。

ｙ：ｘ＝ｘ：ｙ－ｘ　これを計算して、負の解は適さないので、

$$y = \frac{1+\sqrt{5}}{2}x$$



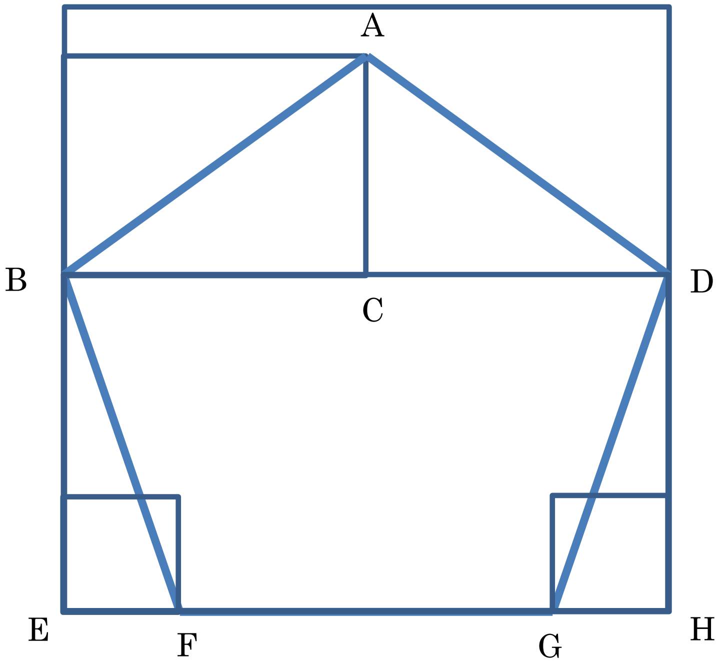
　ちなみに、折紙の中に正五角形と聞いて、最初に思いついたのが、次のページの図である。これは紙のムダを考えずに正方形の底辺と正五角形の底辺を一致させたものである。説明を円滑にするために、説明に用いる点には全て記号をふっておく。実は、この場合だとそれぞれの長さを求めるのが非常に簡単なのである。
　まず、正五角形の１辺の長さをすぐに求めることができる。同様に正方形の１辺の長さを１、正五角形の１辺の長さをｘとする。

先ほどの黄金比の関係を用いて、 $x=\dfrac{2}{1+\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

EF=GH より、$EF=\dfrac{1-x}{2}=\dfrac{3-\sqrt{5}}{4}$　　　また、$BF=x$

　三角形 BEF に着目して、BE の長さを求める。

$$BE=\sqrt{x^2-\left(\frac{1-x}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$$



そして、三角形ABCに着目してACを求める。

$$\mathrm{AC}=\sqrt{x^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{2}$$

以上の結果から、近似値を求めて、

$\mathrm{AC} \approx 0.363$　　$\mathrm{BE} \approx 0.588$　　$\mathrm{EF} \approx 0.191$

こうして上の図を描くことができた。

ちなみに、折紙でもこれら2種類の図を描いてみた結果、見事に正五角形ができあがった（微妙にずれてはいたものの、誤差の範囲内であった）。2枚を重ね合わせたところ、確かに先に述べた方の正五角形が大きかったが、15cm四方だったためもあるが、あまり大きな差はないように感じられた。

ということで、最後に2種類の正五角形の辺の差を求める。

$$（辺の差）=\frac{\sqrt{2}\left(3+\sqrt{5}\right)-2\sqrt{5+\sqrt{5}}}{1+\sqrt{5}}-\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}\left(3+\sqrt{5}\right)-2\sqrt{5+\sqrt{5}}-2}{2\left(1+\sqrt{5}\right)}$$

$$\approx 0.00770$$

つまり、15cm 四方においては、

（辺の差）＝150mm×0.00770=0.1155mm

……、そりゃあ差がわかりにくいのも当然だ。。

参考文献

サイト「Origami で幾何学する」

http://irohacross.net/2013/02/kikagakuorigami.html