折紙作品の距離について

勇者ひまじん

1　前書き

1.1　前提

まず最初に申し上げておきますが，この原稿の内容は徹頭徹尾完璧に数学です．数学がお好きでない方にはこの原稿を読み飛ばすことをおすすめいたします．

さらに，高校レベルの数学の知識については理系だけが習う範囲を除いて既知とさせていただきます．それ以外の部分については出来る限り説明を付け，数学が好きな高校生であれば文理関係なく理解することができるように書くつもりですのでご安心ください．逆に理工系の大学に在籍する方ないしは卒業した方にとっては厳密性を欠いた言い回しに感じる部分があるやもしれませんが，この原稿は主に高校生を対象として書いていますのでなにとぞご容赦ください．

1.2　何がしたくてこれを書いているのか

折紙作品の距離を定義します．但し，距離と言っても皆様がよくご存じの定規で測る距離ではありません．では何が距離なのかというと，大雑把には「0 未満にならないし，0 になるのはまったく同じもの同士の距離を測っているときだけ」で「2 つのものの間の距離はどっちを基準に測っても同じになる」し，「寄り道をすると距離が長くなるかもしれない」もののことです．この原稿を読んでいる方には数式を使って説明してくれた方が分かりやすいという方の方が多いでしょうから，次節で距離についてのきちんとした解説を行っておきます．

1.3　距離とは何か

距離を定義する集合を X とします．ここで X はどんな集合であっても構わないことに注意してください．以下では x, y, z は X の元であるとします．距離というのは、次の 3 つの条件

を満たすような $X \times X$ から $\mathbb{R}$ への写像 $d(x, y)$ のことです．

1. $d(x, y) \geq 0$ であり，かつ $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
2. $d(x, y) = d(y, x)$.
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

$X \times X$ というのは X の元を 2 つ並べたものの集合で，$\mathbb{R}$ は実数全体の集合です．写像というのは関数を一般化した概念で，集合 A, B に対して A から B への写像と言った場合，A の元に 1 つだけ B の元を対応させる規則を指します (このとき A を始域，B を終域と呼びます)．ここでの 1,2,3 がこの順に「0 未満にならないし，0 になるのはまったく同じもの同士の距離を測っているときだけ」「2 つのものの間の距離はどっちを基準に測っても同じになる」「寄り道をすると距離が長くなるかもしれない」に対応しています．

1.4 前提条件等

とりあえず「xy 平面上で折紙作品を折り，折紙作品の距離を定義する」ことを目指します．その上で簡単のため，「山折りまたは谷折りのみで完成させることができて，ぐらい折りを使わないような平坦に折りたためる作品のみを対象とし，すべての折り線は直線である」とします．別に平面以外でもやることは一緒なのですが，わかりやすさの点から平面に限定することにしました．xyz 空間などなどへの一般化はみなさんにお任せします．「ぐらい折り」というのは「大体このぐらい」という感じで行われる折りのことで，主に仕上げの工程などで使われます．これを考慮すると距離を定義する前にいろいろと面倒なことをしなくてはならないので今回は無視させていただきます．

2 本題

2.1 定義

さてここから本題です．この節ではとりあえず特殊な用語を定義していきます．分かりづらいと思われるところには適宜解説を加えていきますので「は？」と思っても読み飛ばさずに一旦最後まで読んでみてください．

なお，この節で定義している単語はすべて筆者が勝手に名付けたものですのでこの原稿を読んでいない人に言ってもキョトンとされるだけです．筆者が知らないところでそんなことになってたら誰も得をしませんので，この原稿について誰かと語り合いたいとお思いになったらその時はまずこの原稿を語り合いたい相手に読ませましょう．

定義 1　階層とは，$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{N}$ の元 $((a, b), n)$ の n のことを指す．ある点 P の階層が n である

とき，P の**階層は** n **である**といい，$R(P) = n$ と書く．階層が n である点全体を**第** n **階層**と呼ぶ．ある集合 A に含まれる点の階層がすべて n であるとき，A **の階層は** n **である**といい，$R(A) = n$ と書く．

$\mathbb{R}^2$ というのは簡単に言えば xy 平面上の点全体の集合のことです．そして $\mathbb{N}$ というのは自然数全体の集合です．$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{N}$ というのは $\mathbb{R}^2$ の元と $\mathbb{N}$ の元をこの順に並べたものの集合です．

定義 2　**紙**とは，$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{N}$ の部分集合のことである．特に第 1 階層にのみ紙があるとき，その紙を**元紙**と呼ぶ．

定義 3　P_1 及び P_2 を紙とする．**折写像**とは次を満たす全単射な写像 $f : P_1 \mapsto P_2$ のことである．

1. $R(P_2) = n$ ならば第 1 階層から第 $(n-1)$ 階層には必ず紙が存在する．
2. 第 $R(P_1)$ 階層に P_1 と境界のみを共有する紙 P_3 が存在する．また，$P_1 \cap P_3$ は第 $R(P_1)$ 階層における線分になる．この線分を**折り目**と呼ぶ．
3. P_1 と P_2 が表す領域は階層を無視すれば折り目について対称である．
4. 第 $R(P_1)$ 階層と第 $R(P_2)$ 階層の間に，「階層を無視すれば内部が折り目と共通部分を持つ」ような紙は存在しない．

なお，第 $R(P_2)$ 階層にすでに紙が存在する場合は第 $R(P_2)$ 階層の紙の階層のみを 1 大きくする．この操作を行う際に第 $R(P_2) + 1$ 階層にすでに紙が存在する場合は第 $R(P_2) + 1$ 階層の紙の階層のみを 1 大きくする．以下これを帰納的に繰り返し，最終的に階層の増減を決定することを **(折写像により) 紙** P_1 **を折る**と呼ぶ．また，折写像の始域となる紙のことを **(折写像により) 折られる紙**，終域となる紙のことを **(折写像により) 折られた紙**と呼ぶ．

全単射というのは写像の種類の 1 つで，始域の元と終域の元が 1 対 1 で重複なく対応しているようなもののことを指します．また，$f : P_1 \mapsto P_2$ というのは「P_1 から P_2 への写像 f」を意味します．内部というのは集合の境界を除いたもののことで，この場合は「紙が表す領域からその境界を除いたもの」という意味になります．ここで定義された「折る」という言葉は要するに現実世界における「紙を折る」という行為を数学的に表したものです．具体例をいくつか考えてみると分かりやすいのではないかと思います．

定義 4　折写像 f により折られる紙 P_1 と折られた紙 P_2 は**折り目により連結されている**という．折り目 l で紙 P_1 と P_2 が連結されているとき，階層が $k(R(P_1) \le k \le R(P_2))$ で，階層を無視すれば折り目 l と同一の線分のことを**連結稜**と呼ぶ．

紙を折ったとき，紙が切り離されることはないですよね？ 連結稜というのはそのことを説明するための概念です．

定義 5　純折写像とは，折られた紙 P がどの連結稜とも共通部分を持たないような折写像のことである．以下では単に折写像といった場合には純折写像のことを指すこととする．

紙は紙をすり抜けることはできませんので，折られた紙が連結稜と共通部分を持っていたらそれは現実では不可能な折りを行ったことになります．というわけで現実世界で可能な折りのみを選別したものが純折写像ということになります．

定義 6　重折写像とは，次を満たす一連の折写像 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ をこの順に並べた順序対である．但し，$f_1, f_2, \cdots, f_n$ により折られる紙をそれぞれ $P_1, P_2, \cdots, P_n$，折られた紙を $Q_1, Q_2, \cdots, Q_n$ とする．

1. $k = 1, 2, \cdots, n-1$ に対し，$f_1, f_2, \cdots, f_k$ により紙を折れば f_{k+1} により紙を折ることができる．
2. $f_1, f_2, \cdots, f_n$ のそれぞれについて，階層を無視すれば折り目が同一となる．
3. $k = 1, 2, \cdots, n-1$ に対し，「$R(P_k) \lneqq R(P_{k+1})$ かつ $R(Q_k) = R(Q_{k+1}) + 1$」か，または「$R(P_k) \gneqq R(P_{k+1})$ かつ $R(Q_k) + 1 = R(Q_{k+1})$」が成立する．
4. $k = 1, 2, \cdots, n$ に対し，「ある整数 $l\,(1 \leq l \leq n, k \neq l)$ が存在して，P_k と P_l は連結されている」か，または「ある整数 $l, m\,((1 \leq l < k < m \leq n)$ が存在して，P_k は，連結されている紙 P_l と P_m の間の階層に存在する」．
5. 折り目がいずれかの連結稜と交点を持つ．

重折写像に含まれる折写像により順次紙を折ることを，**重折写像により折る**という．また，重折写像に含まれる折写像により折られる一連の紙を**重折写像により折られる紙**，折られた一連の紙を**重折写像により折られた紙**と呼ぶ．

注意 1　折り目が連結稜と交点を持つ場合には必ず重折写像により折らなければならない．また，重折写像により紙を折る場合には，折り目が必ずいずれかの連結稜と交点を持っていなければならない．

現実世界で折り紙をしているときには紙が重なった部分を折るという場面が多々あります．折写像だけではそのような折りは扱えないので重折写像という概念を導入する必要があるわけです．

定義 7　復元写像とは，折写像の逆写像のことである．折写像により折られた紙 P_1 を，復元写像により，折られる紙 P_2 に写した際には，それぞれの紙の階層は折写像により折る前の状態に戻る．この一連の操作をまとめて，**復元写像により紙 P_1 を P_2 に戻す**と呼ぶ．重折写像に含まれる各折写像の逆写像を逆順に並べた順序対を**重復元写像**と呼ぶ．重復元写像により順次紙を戻すことを**重復元写像により紙を戻す**と呼ぶ．

定義 8　元紙を有限回折ることにより得られた紙及び連結稜の全体を**作品**と呼ぶ．また，元紙を折ることにより作品を得ることを**作品を作る**という．

定義 9　作品 W を作るのに必要な折写像及び重折写像を，元紙を折るところから順に並べた順序対を**工程表**と呼び，$M(W)$ と書く．

順序対というのは順番も重複も無視しないような何らかのものの集まりのことです．たとえば「生徒を出席番号順に並べたもの」や「生徒の誕生日を生徒の出席番号順に並べたもの」などは順序対です．

定義 10　**工程数**とは，工程表の元の個数である．ある作品 W の工程数が n であるとき，$S(W)=n$ と書く．

工程数の定義には「基準となる折りすじをつける」というような工程は含まれません．これは，そうしないと工程数が一意に定まらないためです．通常の折り紙とは感覚が異なりますが，ご容赦ください．

定義 11　作品 W, X の工程表 $M(W), M(X)$ が，左から n 番目の元まで等しいとき，$M(W)$ の元で，左から順に n 番目までの折写像または重折写像により元紙を折ったものを **W と X の基本形**と呼び，$B(W, X)$ と書く．

ここでいう「基本形」は折り紙で通常使われている「基本形」とは意味が違いますのでご注意ください．

定義 12　W, X を作品とする．**W と X の作品間工程数**とは，$S(W)+S(X)-2S(B(W,X))$ のことである．W と X の作品間工程数を $S(W, X)$ と書く．

式だとよく分からないかもしれませんが，次節で 2 番目に示すことから作品間工程数の直感的な意味が分かると思います．

2.2　定理

　ようやく距離を定義できます．距離を定義するために 2 つほど定理を証明して，最後に作品間工程数が距離であることを示します．

定理 1　W, X を作品とすると，

$$S(W,X)=S(W,B(W,X))+S(B(W,X),X)$$

が成り立つ．

証明

$$B(W,X)=B(W,B(W,X))=B(B(W,X),X)$$

が成り立つ．従って，

$$\begin{aligned}S(W,X)&=S(W)+S(X)-2S(B(W,X))\\&=S(W)+S(B(W,X))-2S(B(W,X))+S(B(W,X))+S(X)-2S(B(W,X))\\&=S(W)+S(B(W,X))-2S(B(W,B(W,X)))+S(B(W,X))+S(X)-2S(B(B(W,X),X))\\&=S(W,B(W,X))+S(B(W,X),X)\qquad(Q.E.D.)\end{aligned}$$

1 行目については基本形がどういうものであったかを考えればお分かりいただけると思います．

定理 2　W,X を作品とする．W と X の作品間工程数は，W を $B(W,X)$ に戻すのに必要な復元写像及び重復元写像の最小数と $B(W,X)$ から X を折るのに必要な折写像及び重折写像の最小数の和になっている．

証明　復元写像及び重復元写像は折る操作の逆の操作であるから，W を $B(W,X)$ に戻すのに必要な復元写像及び重復元写像の最小数は $S(W,B(W,X))$ に等しい．また，$B(W,X)$ から X を折るのに必要な折写像及び重折写像の最小数は $S(B(W,X),X)$ である．よって，定理 1 より従う．$(Q.E.D.)$

注意 2　この定理より作品間工程数は W を X にするのに必要な復元写像・重復元写像・折写像・重折写像の個数の総和の最小数であることが分かる．

これが作品間工程数の直感的な意味です．よーするにある作品から別の作品を得るのに必要な「戻す」回数と「折る」回数の和の最小値ということです．

定理 3　作品全体の集合を F とすると，(F,S) は距離空間である．

「(F,S) は距離空間である」という言い回しが出てきましたが，これは要するに「F の元に対して S によって距離が定まる」という意味です．では，証明しましょう．

証明　$W,X,Y\in F$ とする．

(1) 定義より $S(W)\geq S(B(W,X))$ かつ $S(X)\geq S(B(W,X))$ より $S(W,X)\geq 0$ である．また，$W\neq X$ とすると，$S(W)-S(B(W,X))\gneqq 0$ または $S(X)-S(B(W,X))\gneqq 0$ より $S(W,X)>0$．よって $S(W,X)=0$ ならば $W=X$．

(2) $B(W,X) = B(X,W)$ であるから，

$$\begin{aligned} S(W,X) &= S(W) + S(X) - 2S(B(W,X)) \\ &= S(X) + S(W) - 2S(B(X,W)) \\ &= S(X,W) \end{aligned}$$

(3) W, X, Y に対し，$S(W,Y) > S(W,X) + S(X,Y)$ が成り立つとすると，定理 2 より右辺は W を $B(W,X)$ に戻すのに必要な復元写像及び重復元写像の最小数，$B(W,X)$ から X を折るのに必要な折写像及び重折写像の最小数，X を $B(X,Y)$ に戻すのに必要な復元写像及び重復元写像の最小数，$B(X,Y)$ から Y を折るのに必要な折写像及び重折写像の最小数の総和であるが，これは作品間工程数の最小性に反する．従って $S(W,Y) \leq S(W,X) + S(X,Y)$ である．

(1),(2),(3) より (F,S) は距離空間である．$(Q.E.D.)$

意外とあっさりですね．(3) が分かりづらいかもしれませんが，もう筆者に解説する気力が残っていませんので自力で理解してください () まあ，ちょっとした背理法なので，ここまで読んだ皆さんであれば理解できるだろうと信じています．

3 あとがき的なアレ

くぅ〜疲れました w これにて完結です！

実は、部誌を作ることを提案したらその案があっさり採用されたのが始まりでした

本当は話のネタなかったのですが←

後輩の熱意を無駄にするわけには行かないので手持ちのネタで挑んでみた所存です w

……とまあ，深夜テンションで改変コピペから始めてしまいましたが，ここからはちゃんと書きます．実際部誌を作ることが決定した段階ではまだネタがなくてどうしたもんかと思っていたので完成してよかったです．完璧に趣味に走ってよく分からない領域に突入した上，十分に時間をかけずに書いているのでまだまだ分かりづらいところなどあるかと思いますが，その辺は仲間内で議論するなどして解決してください．

いやーとにかくめちゃくちゃ疲れました．でもまだ現問研の原稿が 1 文字もかけてないのでまだ休めません．夏休みってもっと休みだと思ってたんですが全然違いましたね (吐血) テンションが再びおかしくなってきたのでもうこの辺で終わります．ここまで読んでくださった皆様に感謝！

4　参考文献

集合論については内田伏一著『数学シリーズ　集合と位相』(2013.1.30 第 25 版 5 刷発行/裳華房) を参考にしました．

残りの部分には参考文献はありません．ふふふ．