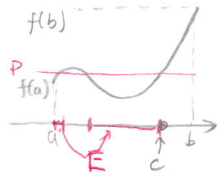


証明 $f(a)<f(b)$とする.

$f(a)<p<f(b)$となるpを任意にとる.

$E=\{x\in[a,b]\mid f(x)\leqq p\}$ とする $\left(\begin{array}{l} a\in E \text{ なので } E\neq\phi \\ E\text{は上に有界} \\ \to \sup E\text{が存在}\end{array}\right)$

$C=\sup E$とする.

$f(c)=p$であることを証明する.

$c=\sup E$なので $x_n\to c\ (n\to\infty)$ $x_n\in E\ (\forall n\in\mathbb{N})$

となる数列$\{x_n\}$が存在する. ($\because\ \forall n\in\mathbb{N}\ \exists x_n\in E$ s.t. $c-\frac{1}{n}\leqq x_n\leqq c$)

$f(x_n)\leqq p\ (\forall n\in\mathbb{N})$, $f(x_n)\to f(c)\ (n\to\infty)$

($\because\ x_n\in E$)　($\because$ fの連続性)

$\therefore f(c)\leqq p$ …①

これより $c<b$ である.

一方, $t_n=c+\frac{b-c}{n}$ とすると, $c<t_n\leqq b\ (\forall n)$

$t_n\notin E\ (\forall n\in\mathbb{N})$　$\therefore f(t_n)>p\ (\forall n\in\mathbb{N})$

$t_n\to c\ (n\to\infty)$ と f の連続性により $f(t_n)\to f(c)\ (n\to\infty)$

$\therefore f(c)\geqq p$ …②

①,②より $f(c)=p$　これより $a<c$ である.

合成関数は $g\circ f$ と書く　つまり, $(g\circ f)(x)=g(f(x))$

定理1.19　fを区間I上の連続関数, gを$f(I)$を含む区間で定義された連続関数 とする

このとき、合成関数$g\circ f$はI上で連続

証明　$a\in I$を任意にとる

$x_n\to a\ (n\to\infty)$ $x_n\in I\ (\forall n\in\mathbb{N})$ である数列$\{x_n\}$を任意にとる

fの連続性から $f(x_n)\to f(a)\ (n\to\infty)$

gの 〃　$(g\circ f)(x_n)=g(f(x_n))\longrightarrow g(f(a))=(g\circ f)(a)\ (n\to\infty)$

$g\circ f$はIで連続

定義(単調関数)　f, 区間I上の関数とする.

(1)「$x_1,x_2\in I$, $x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)\leqq f(x_2)$」のとき$f$は$I$上単調増加であるという.

「$x_1,x_2\in I$ $x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)\geqq f(x_2)$」 〃 〃 単調減少 〃

これらを合わせて単調関数という。

(2)「$x_1,x_2\in I$ $x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$」のとき$f$は$I$上狭義単調増加であるという。

「 〃 〃 $\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$」 〃 〃 狭義単調減少 〃

これらを合わせて狭義単調関数という.

D ∈ ℝ 上の関数 f が

$x_1, x_2 \in D,\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

をみたすとき、f は D 上で **1対1** であるという。

このとき f の逆関数を f^{-1} と書く。

注 f が区間 I で狭義単調 ⇒ f は I で1対1

定理1.20 閉区間 $I=[a,b]$ 上の狭義単調な連続関数 f に対して、逆関数 f^{-1} は閉区間 $f(I)$ 上の狭義単調な連続関数である。(難波 定理1.22)

1.5 初等関数

☆ 三角関数

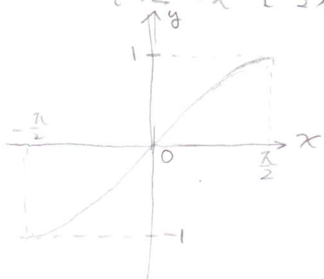
$\sin x,\ \cos x,\ \tan x.\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

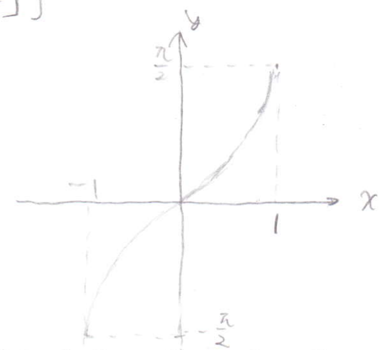
☆ 逆三角関数

1) $\sin x$ は $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上で狭義単調増加、連続、値域 $[-1,1]$

その逆関数を $\sin^{-1}x$ や $\arcsin x$ と書く。(アークサインとよぶ)

$\sin^{-1}x$ は $\begin{cases} 定義域\ [-1,1] \\ 値域\ [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$ で、狭義単調増加、連続.





2) $\cos x$ は $[0,\pi]$ 上狭義単調減少、連続で値域 $[-1,1]$.

その逆関数を $\cos^{-1}x$ や $\arccos x$ と書く。

$\cos^{-1}x$ は $\begin{cases} 定義域\ [-1,1] \\ 値域\ [0,\pi] \end{cases}$ で狭義単調減少、連続