注意 定理1.11について補足

「(*)をみたす任意の数列$\{x_n\}$に対して、数列$\{f(x_n)\}$が収束する」 ↙極限を明示していない。

ならば、$\lim_{n\to\infty} f(x_n)$の値は、(*)をみたす数列$\{x_n\}$のとり方に依らず定まる。

∵ $\{x_n\}\{y_n\}$が(*)をみたすとする。

$\{x_n\}$と$\{y_n\}$の項を交互に並べてできる数列を$\{z_n\}$とする。

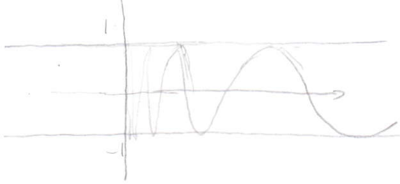
($z_{2m-1}=x_m$, $z_{2m}=y_m$ である)

このとき、$z_n \to a$, $z_n \neq a$ なので、(*)より、

$\alpha = \lim_{n\to\infty} f(z_n)$ が存在する。

$\{f(x_n)\}$と$\{f(y_n)\}$は$\{f(z_n)\}$の部分列なので、

$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(y_n) = \alpha$



例 $\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ は存在しない。

証明 $a_n = \frac{1}{n\pi}$ とすると、$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$\sin\frac{1}{a_n} = \sin n\pi = 0 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

$b_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$ とすると、$\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

$\sin\frac{1}{b_n} = \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

$\lim_{n\to\infty} \sin\frac{1}{a_n} = 0 \quad \lim_{n\to\infty} \sin\frac{1}{b_n} = 1$

異なる

$\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ は存在しない。

定理1.12 $a \in \mathbb{R}$ $\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$、$\lim_{x\to a} g(x) = \beta$ とすると、以下が成立。

(1) $\lim_{x\to a} (f(x)+g(x)) = \alpha+\beta$ (2) $\lim_{x\to a} (c f(x)) = c\alpha$ (cは定数)

(3) $\lim_{x\to a} (f(x)g(x)) = \alpha\beta$ (4) $\alpha \neq 0$ のとき、$\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\beta}{\alpha}$

(5) $\lim_{x\to a} |f(x)| = |\alpha|$

証明は定理1.11と数列の極限の性質からすぐに従う。

定理1.13 (1) aの十分近くで $f(x) \leqq g(x)$ (点a以外の)、$\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$ $\lim_{x\to a} g(x) = \beta$ $\Rightarrow \alpha \leqq \beta$

(2) aの十分近くで $f(x) \leqq g(x) \leqq h(x)$ (点a以外の)、$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = \alpha$ $\Rightarrow \lim_{x\to a} g(x) = \alpha$

($\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$ の定義)

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ s.t. $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-\alpha| < \varepsilon$

$0 < |x-a| < \delta$ となる任意の x に対して $|f(x)-\alpha| < \varepsilon$

$\forall x \in (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}$, $|f(x)-\alpha| < \varepsilon$

「極限 $\lim_{x\to a} f(x)$ が存在する」とは $x \to a$ のとき $f(x)$ が収束すること。

定理 1.14 (コーシーの判定条件)

(A) $x \to a$ のとき $f(x)$ が収束する

$\Longleftrightarrow$ (B) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ s.t. 「$0 < |x-a| < \delta$, $0 < |x'-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$」

証明 (A)⇒(B) $\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$ とする。

$\varepsilon > 0$ を任意にとる。

$\exists \delta > 0$, s.t. 「$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$」

$0 < |x-a| < \delta$　$0 < |x'-a| < \delta$ ならば

$|f(x) - f(x')| \leqq |f(x) - \alpha| + |\alpha - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$　　(B) 成立。

(B)⇒(A)　(B) が成り立つとする。

$\varepsilon > 0$ を任意にとる。(B) での $\delta > 0$ をとる。

[定理 1.11 と次の注意より、
$\lim_{n \to \infty} x_n = a$, $x_n \neq a$ ($\forall n$) となる任意の数列 $\{x_n\}$ に対して
数列 $\{f(x_n)\}$ が収束することを示せばよい。]

$\lim_{n \to \infty} x_n = a$, $x_n \neq a$ ($\forall n$) となる数列を任意にとる。

$\exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $\forall n \geqq N$, $0 < |x_n - a| < \delta$

$\forall m, n \geqq N$ に対して (B) より。($0 < |x_n - a| < \delta$, $0 < |x_m - a| < \delta$ より)

$|f(x_m) - f(x_n)| < \varepsilon$

$\{f(x_n)\}$ がコーシー列となり収束する。

㊀ 片側極限　$\lim_{x \to a+0} f(x)$　$\lim_{x \to a-0} f(x)$

定義 (1) α が $f(x)$ の点 a での右極限 (左) であるとは、以下が成り立つこと。

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ s.t. 「$0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon$」

$0 < a - x < \delta$

このことを $\lim_{x \to a+0} f(x) = \alpha$ 又は、$f(x) \to \alpha$ ($x \to a+0$) と書く。

$\lim_{x \to a-0} f(x) = \alpha$　　$f(x) \to \alpha$ ($x \to a-0$)

右極限と左極限を合わせて片側極限という。

$\lim_{x \to a+0} f(x) = \pm\infty$　$\lim_{x \to a-0} f(x) = \pm\infty$ も同様に定義される。

記号　$a = 0$ のとき

$x \to 0+0$ のことを $x \to +0$
$x \to 0-0$ のことを $x \to -0$　) と略記する。

命題 ・極限 $\lim_{x \to a} f(x)$ が存在する。

$\Longleftrightarrow$ 片側極限 $\lim_{x \to a+0} f(x)$ と $\lim_{x \to a-0} f(x)$ がともに存在してこれらの値が等しい。

注意 片側極限に対しても定理 1.11〜1.14 に相当するものが成立する。

㊀ $x \to \infty$ のときと、$x \to -\infty$ のときの極限

関数 f がある無限区間 (c, ∞) で定義されているとする。

定義 $f(x)$ が $x \to \infty$ のとき α に収束するとは、以下が成り立つこと。

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists L > c$ s.t. $\forall x \geqq L$, $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$

このことを $\lim_{x\to\infty} f(x) = \alpha$ 又は $f(x) \to \alpha\ (x\to\infty)$ と書く.

定義 (1) $f(x)$ が $x\to\infty$ のとき∞に発散するとは, 以下が成り立つこと.

$\forall k \in \mathbb{R}\ \exists L > 0\ \ s.t.\ \forall x \geqq L\ \ f(x) > k$

このことを $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ 又は $f(x) \to \infty\ (x\to\infty)$ と書く.

(2) $\lim_{x\to\infty}(-f(x)) = \infty$ のとき, $f(x)$ は $x\to\infty$ のとき $-\infty$ に発散するという.

$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ などと書く。

$\lim_{x\to\infty} f(x)$ に対しても, 定理1.11〜1.14に相当するものが成立.

定理1.15 (コーシーの判定条件)

・$f(x)$ が $x\to\infty$ のとき収束する

$\Longleftrightarrow$ ・$\forall \varepsilon > 0, \exists L > 0\ \ s.t.\ \forall x, x' \geqq L, |f(x) - f(x')| < \varepsilon$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)$ についても同様に定義される.

1.4. 連続関数 (1変数)

定義 $a \in \mathbb{R}$ とし, $f(x)$ は「点 a を含むある開区間」で定義されているとする.

($\Rightarrow f(x)$ は $x = a$ で定義されている)

関数 f が点 $x=a$ で連続であるとは,

$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ が成り立つことをいう.

つまり, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,\ s.t.$「$|t-a| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(a)| < \varepsilon$」

注意 ・f が点 $x = a$ で連続

$\Longleftrightarrow$ ・$\lim_{n\to\infty} x_n = a$ となる任意の数列 $\{x_n\}$ に対して $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$

(定理1.11)

定義 ・$\lim_{x\to a+0} f(x) = f(a)$ のとき, f は $x=a$ で右連続であるという
$\lim_{x\to a-0} f(x) = f(a)$ のとき, f は $x=a$ で左連続であるという
} 片側連続

定義 区間 I 上の関数 f が I の全ての点で連続であるとき,

f は区間 I で連続であるという. つまり, $\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, s.t.$「$|t - x| < \delta\ (t \in I) \Rightarrow |f(t) - f(x)| < \varepsilon$」

但し, I の端点が I に属するとき, その点では片側連続でよい.

(例えば, $I = [a, b)$ のとき, 左端 a では右連続でよい.)

定理1.16 $f(x)$ と $g(x)$ が点 a で連続ならば

関数 $f(x)+g(x)$, $cf(x)$ (c は定数), $f(x)g(x)$, $\frac{g(x)}{f(x)}$ $(f(a) \neq 0)$, $|f(x)|$ は点 a で連続

$D \subset \mathbb{R}$ f を D 上の関数とする $f(D) = \{f(x) \mid x \in D\}$

定義 ・関数 f が D で上に有界であるとは, $f(D)$ が上に有界であること. …①
・ 〃 下に有界 〃 〃 下に有界 〃 …②
・ 〃 有界 〃 〃 有界 〃 …③

① $\Longleftrightarrow$ $\exists M \in \mathbb{R}\ s.t.\ \forall x \in D\ \ f(x) \leqq M$

$\exists M > 0\ s.t.\ \forall x \in D, |f(x)| \leqq M$

$\sup_{x\in D} f(x) = \sup f(D)$ $\inf_{x\in D} f(x) = \inf f(D)$
$\max_{x\in D} f(x) = \max f(D)$ $\min_{x\in D} f(x) = \min f(D)$
) と書く

定理1.17（最大値と最小値の定理）

閉区間$[a,b]$上の連続関数fは$[a,b]$で最大値と最小値をもつ。
（特に、fは$[a,b]$で有界）

証明 fを$[a,b]$上の連続関数とする（最大値について示す）

(i) fが$[a,b]$で上に有界であることを示す。（背理法）

fが$[a,b]$で上に有界でないとする。$f([a,b])$が上に有界でないので、

$\forall n \in \mathbb{N},\ {}^{\exists}t_n \in [a,b]$ s.t. $f(t_n) > n$ …①

$a < t_n < b$ なので、$\{t_n\}$は有界列

定理1.9より、$\{t_n\}$は収束部分列$\{t_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$をもつ。$c = \lim_{k\to\infty} t_{n_k}$とする。

$a \leq t_{n_k} \leq b$ より、$a \leq c \leq b$　$c \in [a,b]$

fは$[a,b]$で連続なので、$f(t_{n_k}) \to f(c)$ $(k\to\infty)$ …②

↖有限確定

一方、①より、$f(t_{n_k}) > n_k \to \infty$ $(k\to\infty)$ …③

②,③は矛盾。∴ fは$[a,b]$で上に有界

(ii) $\max_{x\in[a,b]} f(x)$が存在することを示す。

(i)より、$M = \sup_{x\in[a,b]} f(x) = \sup f([a,b]) \in \mathbb{R}$が存在する（∵連続の公理）

$f(x_n) \to M$ $(n\to\infty)$　$x_n \in [a,b]$ $(\forall n)$　④

となる数列$\{x_n\}$が存在する。

(∵ $\forall n \in \mathbb{N},\ {}^{\exists}x_n \in [a,b]$ s.t. $M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M$)

$\{x_n\} \in [a,b]$より、$\{x_n\}$は有界列

定理1.9より、$\{x_n\}$は収束部分列$\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$をもつ。$d = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$とする。

$a \leq x_{n_k} \leq b$ より、$a \leq d \leq b$　$d \in [a,b]$

fは$[a,b]$で連続なので $f(x_{n_k}) \to f(d)$ $(k\to\infty)$ …⑤

④より、$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = M$ なので⑤より、$M = f(d)$

$M = \max_{x\in[a,b]} f(x)$

定理1.18（中間値の定理）

fを閉区間$[a,b]$上の連続関数とし、$f(a) \neq f(b)$とする。

このとき$f(a)$と$f(b)$の間の任意の数p $(p \neq f(a), f(b))$に対して、

$$f(c) = p \text{ かつ } a < c < b$$

をみたす数cが存在する。

定理1.17と定理1.18より、

系 閉区間I上の連続関数fの値域は、閉区間$[m,M]$

ここで、$M = \max_{x\in I} f(x)$　$m = \min_{x\in I} f(x)$ である。