定理1.4. 収束する数列は有界である.

証明 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ であるとする. ($\varepsilon = 1$ として)

$\exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $\forall n \geq N$ $|a_n - \alpha| < 1$

$n \geq N \Rightarrow |a_n| \leqq |\alpha| + |a_n - \alpha| < |\alpha| + 1$

$\forall n \in \mathbb{N}$ に対して

$|a_n| \leqq \max\{|a_1|, \cdots |a_{N-1}|, |\alpha| + 1\}$

$|a_n|$ は有界

注意 定理1.4の逆は成立しない.

例えば $a_n = (-1)^n$ とすると, $\{a_n\}$ は有界だが収束しない.

定理1.5. $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ とすると, 以下が成立.

(1) $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \alpha + \beta$ (2) $\lim_{n\to\infty} (c a_n) = c\alpha$ (cは定数)

(3) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta$

(4) $\alpha \neq 0$, $a_n \neq 0$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) ならば $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{\beta}{\alpha}$

証明 (1) $\varepsilon > 0$ を任意にとる.

$$\left.\begin{array}{l} \exists N_1 \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \forall n \geq N_1 \quad |a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \exists N_2 \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \forall n \geq N_2 \quad |a_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2} \end{array}\right\} (*)$$

$N = \max\{N_1, N_2\}$ とすると, $\forall n \geq N$ に対して

$|(a_n + b_n) - (\alpha + \beta)| \leqq |a_n - \alpha| + |b_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \alpha + \beta$

(3) $\varepsilon > 0$ を任意にとる.

$\{a_n\}$ は収束するので有界 $\exists M > 0$ s.t. $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leqq M$

$$\begin{aligned} |a_n b_n - \alpha\beta| &= |a_n(b_n - \beta) + \beta(a_n - \alpha)| \\ &\leqq |a_n||b_n - \beta| + |\beta||a_n - \alpha| \leqq M|b_n - \beta| + |\beta||a_n - \alpha| \cdots ① \end{aligned}$$

$\exists N_1 \in \mathbb{N}$ s.t. $\forall n \geq N_1$ $|a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2(|\beta| + 1)}$

$\exists N_2 \in \mathbb{N}$ s.t. $\forall n \geq N_2$ $|b_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2M}$

$N = \max\{N_1, N_2\}$ とすると, ① より

$|a_n b_n - \alpha\beta| < M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + |\beta| \cdot \frac{\varepsilon}{2(|\beta| + 1)} \leqq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta$

定理 1.6.
$$\left.\begin{array}{l}\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \leqq b_n \\ \lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \beta\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \leqq \beta$$

証明 (背理法) $\alpha > \beta$ とする。($\varepsilon = \frac{\alpha-\beta}{2} > 0$ とおくと)

$\exists N_1 \in \mathbb{N}$ s.t. $\forall n \geqq N_1$ $|a_n - \alpha| < \frac{\alpha-\beta}{2}$ …… ①

$\exists N_2 \in \mathbb{N}$ s.t. $\forall n \geqq N_2$ $|b_n - \beta| < \frac{\alpha-\beta}{2}$ …… ②

$N = \max\{N_1, N_2\}$ とすると、

$$\alpha - \frac{\alpha-\beta}{2} \underset{①}{<} a_N \leqq b_N \underset{②}{<} \beta + \frac{\alpha-\beta}{2} \Rightarrow \alpha+\beta < \alpha+\beta \quad \text{不合理}$$

$\alpha \leqq \beta$

定理 1.7. (はさみ打ちの原理)

(1) $\left.\begin{array}{l}\cdot\ \forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \leqq b_n \leqq c_n \\ \cdot\ \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \alpha\end{array}\right\} \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$

(2) $\left.\begin{array}{l}\cdot\ \forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \leqq b_n \\ \cdot\ \lim_{n\to\infty} a_n = \infty\end{array}\right\} \lim_{n\to\infty} b_n = \infty$

証明 (1) $\varepsilon > 0$ を任意にとる。

$\exists N_1 \in \mathbb{N}$ s.t. $\forall n \geqq N_1$ $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ $\alpha - \varepsilon < a_n < \alpha + \varepsilon$ … ①

$\exists N_2 \in \mathbb{N}$ s.t. $\forall n \geqq N_2$ $|c_n - \alpha| < \varepsilon$ $\alpha - \varepsilon < c_n < \alpha + \varepsilon$ … ②

$N = \max\{N_1, N_2\}$ とすると。 $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して、

$\alpha - \varepsilon \underset{①}{<} a_n \leqq b_n \leqq c_n \underset{②}{<} \alpha + \varepsilon$ $\quad |b_n - \alpha| < \varepsilon$

$\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$

命題 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n| = |\alpha|$

($\because$ $0 \leqq ||a_n| - |\alpha|| \leqq |a_n - \alpha| \to 0$ $(n \to \infty)$)

定義 ・$a_n \leqq a_{n+1}$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) を満たす数列を (単調) 増加列 という。

・$a_n \geqq a_{n+1}$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) を満たす数列を (単調) 減少列 という。

・増加列と減少列を合わせて 単調数列 という。

定理 1.8. (1) 上に有界な増加列 $\{a_n\}$ は、$\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$ に収束する。

(2) 下に有界な減少列 $\{a_n\}$ は $\inf_{n\in\mathbb{N}} a_n$ に収束する。

(3) 上に有界でない増加列は ∞ に発散する。

(4) 下に有界でない減少列は $-\infty$ に発散する。

証明 (1) $\{a_n\}$ を上に有界な増加列とする。

実数の連続性公理より、$\alpha = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n \in \mathbb{R}$ が存在する

$\varepsilon > 0$ を任意にとる。

上限の定義 $\longrightarrow \begin{cases} \cdot\ \forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leq \alpha \\ \cdot\ \exists N \in \mathbb{N}\ \text{s.t.}\ \alpha - \varepsilon < a_N \end{cases}$

$\{a_n\}$は増加列なので、

$\forall n \geq N \quad \alpha - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq \alpha < \alpha + \varepsilon$

$\therefore \forall n \geq N,\ |a_n - \alpha| < \varepsilon \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$

例　$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$とすると、$\{a_n\}$は収束する

$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$と書き、$e$をネイピア数という。 $e = 2.718\cdots$

証明　$\{a_n\}$が上に有界な増加列であることを示す。

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \underset{\uparrow\ \text{二項定理}}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{1}{n}\right)^k = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{1}{n^k}$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\times\cdots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \cdots (*)$$

$$a_{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\times\cdots\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)$$

$$= \underbrace{1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)}_{>a_n} + \underbrace{\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right)}_{>0}$$

$> a_n$.

$\{a_n\}$は増加列

(*)より、

$$a_n \leq 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \leq 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$= 1 + \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 1 + 2\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\} < 3$$

$\{a_n\}$は上に有界な増加列となり収束する。

数列$\{a_n\}$の一部の項を無限個取り出して順序を変えないで並べたものを$\{a_n\}$の部分列という。

$\{a_n\}$の部分列は自然数の増加列　$n_1 < n_2 < n_3 \cdots\cdots \to \infty$を用いて

$a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, a_{n_4} \cdots$

つまり、$\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$と表される。

例えば、$\{\underbrace{a_{2k}}_{n=2k}\}$、$\{\underbrace{a_{2k-1}}_{n=2k-1}\}$は$\{a_n\}$の部分列

注　$\{a_n\}$がαに収束するなら、$\{a_n\}$の任意の部分列はαに収束する

定理1.9（ボルツァノ・ワイエルストラスの定理）

有界な数列は収束する部分列を含む。

（つまり、有界な数列から適当な部分列をとれば収束する。）

具体例 $a_n=(-1)^n$ とすると、$\{a_n\}$は有界だが、収束しない

$a_{2k}=1$ $(\forall k\in\mathbb{N})$ $\lim_{k\to\infty} a_{2k}=1$ $\{a_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$は収束している。

証明は後

定理1.10（コーシーの判定条件）

・数列$\{a_n\}$が収束する

$\Longleftrightarrow$ ・$\forall\varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N}$ s.t. $\forall m,n\ge N,\ |a_m-a_n|<\varepsilon$ …(c)

定義 (c)をみたす数列$\{a_n\}$をコーシー列又は基本列という。

(c)を形式的に $\lim_{m,n\to\infty}|a_m-a_n|=0$ と書くことができる。

証明(⇒) $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$ とする。 $\varepsilon>0$を任意にとる。

$\exists N\in\mathbb{N}$ s.t. $\forall n\ge N$ $|a_n-\alpha|<\frac{\varepsilon}{2}$

$m,n\ge N$ならば

$|a_m-a_n|\le|a_m-\alpha|+|\alpha-a_n|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$ …(c)が成立。

(⇐) (c)が成り立つとする。

(i) $\{a_n\}$が有界であることを示す。

(c)で $\varepsilon=1$として、$\exists N\in\mathbb{N}$ s.t. $\forall m,n\ge N$ $|a_m-a_n|<1$

$m=N$として $\forall n\ge N$ $|a_N-a_n|<1$

$n\ge N$ならば

$|a_n|\le|a_n-a_N|+|a_N|<1+|a_N|$

$\forall n\in N$に対して、$|a_n|\le\max\{|a_1|,\dots,|a_{N-1}|,1+|a_N|\}$

∴ $\{a_n\}$は有界。

(ii) $\{a_n\}$が収束することを示す

$\varepsilon>0$を任意にとる

(c)より、$\exists N'\in\mathbb{N}$ s.t. $\forall m,n\ge N'$ $|a_m-a_n|<\frac{\varepsilon}{2}$ …①

$\{a_n\}$は有界なので、定理1.9より$\{a_n\}$のある部分列$\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$が収束する。

$\alpha=\lim_{k\to\infty}a_{n_k}$とすると、

$\exists l\in\mathbb{N}$ s.t. $|a_{n_l}-\alpha|<\frac{\varepsilon}{2}$, $n_l\ge N'$ …②

← ($n_k\nearrow\infty$ ($k\to\infty$) より)

①,②より、$\forall n\ge N'$に対して、

$|a_n-\alpha|\le|a_n-a_{n_l}|+|a_{n_l}-\alpha|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$

∴ $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$

$a_n=(-1)^n$

$|a_{n+1}-a_n|=2$ $(\forall n\in\mathbb{N})$ ⇒ 収束しない

$a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ とすると、$\{a_n\}$は収束しない。

NO. 10

DATE . .

1.3. 関数の極限 (1変数)

$D\subset\mathbb{R}$ とし、D を定義域とする関数 $y=f(x)$ に対して「f は D 上の関数」などという。

$f(D)=\{f(x)\mid x\in D\}$ を f の値域という。

㋐ $x\to a$ のときの極限 ($a\in\mathbb{R}$)

ここでは関数 f は $x=a$ の十分近くで定義されていて点 a では定義されていてもいなくてもよいとする。

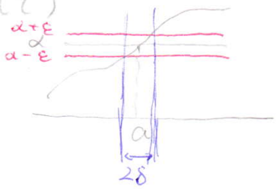
(つまり、ある開区間 I が存在して、$a\in I$ で $I\setminus\{a\}$ が f の定義域に含まれるとする
$A\setminus B=\{x\mid x\in A,\ x\notin B\}$)

($\lim_{x\to a}f(x)=\alpha$)

定義 関数 $f(x)$ が $x\to a$ のとき α に収束するとは以下が成り立つこと。

$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0$ s.t. $0<|x-\alpha|<\delta \Rightarrow |f(x)-\alpha|<\varepsilon$

($0<|x-\alpha|<\delta$ となる任意の x に対して)



このとき、α を $x\to a$ のときの $f(x)$ の極限値という

注意 極限値が存在すれば唯一つ。

$f(x)$ が $x\to a$ のときに収束しないとき、発散するという。

定義 (1) $f(x)$ が $x\to a$ のとき ∞ に発散するとは、

$\forall k\in\mathbb{R},\ \exists\delta>0$, s.t. $0<|x-\alpha|<\delta \Rightarrow f(x)>k$

が成り立つこと。

(2) $f(x)$ が $x\to a$ のとき $-\infty$ に発散するとは、

$\lim_{x\to a}(-f(x))=\infty$ ことをいう。

問 $\lim_{x\to a}x^3=a^3$

定理1.11 (A) $x\to a$ のとき、$f(x)$ が α に収束する.

$\iff \lim_{n\to\infty}x_n=a$ かつ $x_n\neq a$ ($\forall n\in\mathbb{N}$) $\cdots(*)$

を満たす任意の数列 $\{x_n\}$ に対して、数列 $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が α に収束する。

証明 (A)⇒(B) を示す。 $(*)$ を満たす数列 $\{x_n\}$ を任意にとる。

$\varepsilon>0$ を任意にとる。

(A)より、$\exists\delta>0$ s.t. $0<|x-\alpha|<\delta \Rightarrow |f(x)-\alpha|<\varepsilon$ $\cdots$ ①

$(*)$より、$\exists N\in\mathbb{N}$ s.t. $\forall n\geq N,\ 0<|x-a|<\delta$ $\cdots$ ②

①,②より、$n\geq N$ ならば、$|f(x_n)-\alpha|<\varepsilon$

$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\alpha$

(B)⇒(A) を示す。(背理法) (B)が成立するとする。

$f(x)\not\to\alpha$ ($x\to a$) であるとする。

? $\exists\varepsilon_0>0$ s.t. $\forall\delta>0,\ \exists\tilde{x}$ s.t. $0<|\tilde{x}-\alpha|<\delta$ かつ $|f(\tilde{x})-\alpha|\geq\varepsilon_0$

各 $n\in\mathbb{N}$ に対して ($\delta=\frac{1}{n}$ として) $\exists x_n$ s.t. $0<|x_n-\alpha|<\frac{1}{n}$ かつ $|f(x_n)-\alpha|\geq\varepsilon_0$

数列 $\{x_n\}$ を考える。

$\lim_{n\to\infty}x_n=a$ かつ $x_n\neq a$ ($n\in\mathbb{N}$) なので、(B)より、$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\alpha$ でなければならない。

これは、$|f(x_n)-\alpha|\geq\varepsilon_0$ ($\forall n\in\mathbb{N}$) に反する。

$\therefore \lim_{x\to a}f(x)=\alpha$